

国家“十五”重点图书

从量子力学到量子光学

——数理进展

范洪义 著



上海交通大学出版社



责任编辑／戴柏诚
封面设计／韦　人

www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

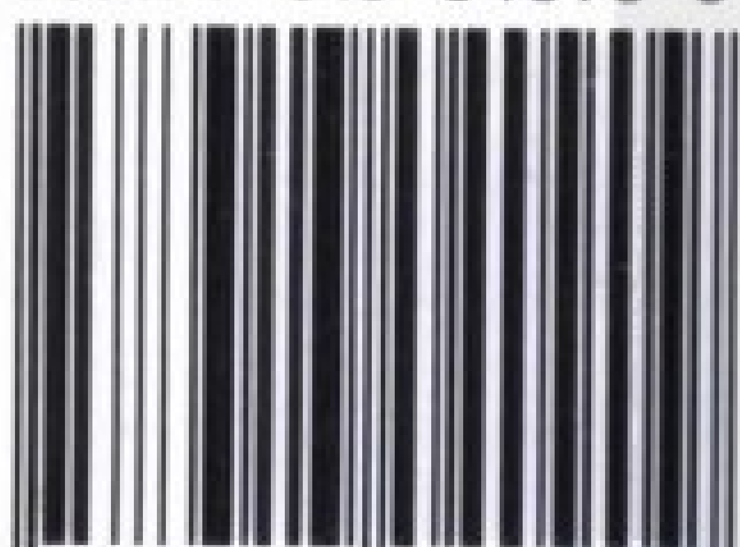
作者简介

本书作者范洪义是我国自主培养的首批18名博士学位获得者之一。

范洪义教授在理论物理多个领域做出原创性的贡献，其中最令世人瞩目的是他独辟蹊径地创造了有序算符内的积分理论，使得牛顿-莱布尼兹积分规则能直接施用于由狄拉克符号组成的投影型算符的积分，从而显著地发展了狄拉克用以阐述量子力学的符号法，使量子力学的表象与变换理论得到别开生面的发展，尤其是他提出的连续变量纠缠态表象，在量子光学与量子信息学中有广泛和重要的应用。

范洪义教授是国际著名的量子光学前沿理论家，他的论文得到很多引用与好评，其原创成果有普及理论物理教学的深远意义。

ISBN 7-313-04090-3



定价:33.00元

国家“十五”重点图书

从量子力学到量子光学

——数理进展

范洪义 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书独辟蹊径地发展了量子力学创始人之一狄拉克的符号法，并结合建立量子力学的连续纠缠态表象，向读者提供了从量子力学向量子光学理论延伸的自然途径，使量子光学的数理基础理论得到别开生面的发展。书中对相干态、压缩态、Wigner 函数、热场动力学、相位算符与量子主方程的理论都有崭新的阐述，成为目前量子光学数理理论最前沿的专著。

本书还介绍了作者新提出的若干纠缠态表象及量子幺正变换理论、Fresnel 变换，深化了量子纠缠的思想。在发展量子光学数理基础的同时，又促进和深化了傅里叶光学的理论研究。

本书适合理工科大学物理专业和通信工程专业的师生及各门理论物理领域的研究人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

从量子力学到量子光学：数理进展 / 范洪义著．—上海：上海交通大学出版社，2005

国家“十五”重点图书

ISBN 7－313－04090－3

Ⅰ．从…　Ⅱ．范…　Ⅲ．①量子力学②量子光学　Ⅳ．O431

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 078624 号

本书出版由上海科技专著出版资金资助

从量子力学到量子光学
——数理进展

范洪义　著

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030）

电话：64071208　出版人：张天蔚

昆山市亭林印刷有限责任公司印刷　全国新华书店经销

开本：850mm×1168mm　1/32　印张：12.75　字数：325 千字

2005 年 12 月第 1 版　　2005 年 12 月第 1 次印刷

印数：1－3 050

ISBN7－313－04090－3/O·177　定价：33.00 元

目　　录

引　言

本书旨在介绍量子力学和量子光学的数理基础理论的新进展。这些进展起源于笔者 20 多年来对量子力学中狄拉克(Dirac)符号法(Symbolic method)的学用心得以及另辟蹊径的研究,由此才水到渠成地使得量子力学的数理基础理论更臻完美。这些进展也体现了符号法的强大生命力,并显示了一种好的物理理论的包容性及其基本要点的简洁性。对于理论物理学家而言,要建立一个理论体系,就应该把理论所能触及的多个物理问题的共同性找出来,从一种原始的方法出发统一地加以描述,并尽可能使这类描述具有简单性。所谓简单性,是指该理论体系所包含的彼此独立的假设或公理数量最少。诚如爱因斯坦指出的那样:"相信世界在本质上是有秩序的和可认识的这一信念,是一切科学工作的基础。"本书的内容都可以归结为是对狄拉克符号法的研究取得的突破成果,这也已经成了符号法的有机组成部分。

狄拉克的符号法是使量子物理学家理性思维形式化的一种很简明的理论,但它具有超乎理性的有效性;它既是简洁的,又是浩瀚的;它把人类心灵深处最美的东西变成外部自然界中的现实,对现实物理是一种共鸣,一种映照,一种天人合一的杰作,因此具有极高的美学价值。奥地利物理学家马赫认为:"可以把科学看成一个最小值问题,这就是花费尽可能最少的思维,对事实作出尽可能最完善的陈述。"符号法,这个由天才狄拉克创造的深刻反映量子规律、有严密逻辑的特殊学问,已经成为量子力学的专门语言。

理论物理大师理查德·费恩曼(R Feynman)在把量子物理与

牛顿经典力学对比后指出，量子现象“是不可能、也绝对不可能用任何经典方法来解释的。”它“是量子力学的核心所在。实际上，它包含的正是量子理论的神秘。”正因为如此，量子力学才有它自身的语言——符号法。人们在学习量子力学这门特殊的学问时，不仅需要深入透彻地去研究它，也需要逐步地去“习惯”它。

第二次世界大战以后，冯・诺依曼在美国洛萨拉莫斯工作时，有一个人向他请教问题，冯说：“很简单，这可以用特征标方法解决。”来人说：“我恐怕还不能理解。”冯说：“年轻人，在数学里不要去理解事情，而应该去习惯事情。”这正如一个初生婴儿虽有眼睛，对于入射于眼睛上的光能在视网膜上成倒立的实像，但他的大脑还没有发展到能将倒立的像矫正为正立的像的能力。在经典力学时代，人们耳闻目见、手足感触的仅局限于宏观物体，因此牛顿力学才应运而生。当时人们的大脑思维还较为简单，不能悟知和找到量子力学与经典力学的结合点。只有当普朗克从分析黑体辐射的光谱中悟出了普朗克常数的存在后，科学家们做了大量、细致的微观框架中的实验，对微观世界做了信息探测，才有可能感知到支配微观世界的规律。这当然需要悟性很高的人做先驱的工作。狄拉克就是这样的先驱之一，他发明了描述量子力学最有效、最方便、最精炼的“文字”，并附之以“语法结构”，于是人们就可以开始进行“语言”的交流，并在使用中丰富与发展了这种“语言”，使之更深刻、更全面地反映自然规律。

对于量子力学的初学者来说，狄拉克符号法是“神秘”的，他们很难理解这种抽象的理论是如何想出来的。这样，他们就不得不在逐渐“习惯”它的过程中去理解、掌握它。本书作者就是在“习惯”这种特殊的语言中逐步发现了狄拉克符号法的魅力，发现它具有逐步展开的能力，有一些预想不到、出乎意外的新用途。这正好应了狄拉克生前的预言：“……在将来，当它（符号法）变得更为人们所了解，而且它本身的数学得到发展之时，它将更多地被人们所采用。”[1]

笔者在“习惯”符号法的过程中创造了有序算符内的积分理论，进一步体会到狄拉克关于量子力学的基本符号不但十分可靠、准确地表达了物理内涵，而且简化了人们的思维过程，增强了思维能力。符号法有相对的独立性，“它比使用它的人聪明。”就笔者本人而言，从中看到了蕴藏在符号法内部的深层次的美，找到了符号法的很多新应用(尤其是在建立了连续纠缠态表象后)，认识到狄拉克创造的符号法确实是描述量子宇宙的语言，是演奏“量子乐曲”的音乐乐谱的“音符”。符号法的优美与简洁、实用与准确，通过有序算符内的积分理论表现得淋漓尽致，它是表述量子论的永恒的载体。英国文学家莎士比亚曾说：“简洁是智慧的灵魂……所以我力求精炼。”笔者通过 20 多年的研究，提高了对科学中蕴含艺术美的鉴赏力。记得狄拉克曾说过：“在我遇到的所有物理学家中，薛定谔是跟我自己最相似的一个。……我相信薛定谔和我都对数学的美有一种深刻的鉴赏力，这主宰了我们的工作。在我们心里有一种信念，任何描述自然界基本规律的等式都必须存在伟大的数学美。这是一种有益的信仰，也是我们成功的基础。”同样，追求表现狄拉克符号法内在的美，也主宰了笔者 20 多年来的研究历程，这也正是撰写本书的指导思想，并充分反映出笔者对理论物理的“艺术”感受。

本书首先介绍有序算符内的积分法，这可以说是符号法中的算符积分规则，它可以使存在于经典力学中的可对易数(c 数)运算与量子力学中的不可对易算符(q 数)运算间的“鸿沟”深度有某种程度的“变浅”。具体而言，可以把算符在某些排序明确的情况下看作是可以对易的 c 数，但算符的本性不变。在这样认定以后，人们就可以把那些在对 c 数积分中出现的 ket-bra 型算符看作是积分参数，而使积分能按通常方式进行。这样一来，就可以极大地发展量子力学的表象理论，找到许多新的物理上有用的完备的表象和大量有用的量子幺正变换算符，由此推陈出新，使量子力学的表象与变换论得到别开生面的发展。

量子力学的表象理论最早是由狄拉克奠定的。对于特定的动力学系统，寻找一个合适的表象，不但具有运动学的意义，而且具有用对角化哈密顿量求得能级与能量本征态的动力学意义。尤其是在本书第二章讨论的连续变量的 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)[2]类型的纠缠态表象，更是在量子通信中有重要的应用，因为量子纠缠现象只有在纠缠态表象中叙述才最清楚。基于量子力学纠缠态表象在量子计算与量子通信中的重要性，无疑应成为量子力学的数理基础之一。

读者将会看到，有序算符内的积分理论和量子力学的纠缠态表象相结合，将极大地促进相干态理论、压缩态理论、相位算符理论、量子主方程的经典对应理论等的发展，而这些理论构成了量子光学的主要数理基础。因此，借助于有序算符内的积分理论，就可以直捷地从量子力学的数理基础进入到量子光学的数理理论。

量子光学是在量子力学规律(原理)和爱因斯坦光的辐射理论支配下建立起来的描述光的量子性质、相干性质、各种非经典行为的学科，这些性质或行为体现在光场本身及与原子的相互作用中(例如原子发射和吸收光子的机理、光子与原子相互作用中动量转移造成原子的冷却与俘获、小型腔中的原子辐射等等)。在研究光的量子理论方面，人们还着眼于研究光的量子噪声，因为它不仅提供了最好的范例来说明量子力学的海森堡测不准原理，而且还促使物理学家去制备由光的非线性过程产生的压缩光场，它的一个正交分量具有比相干态更小的量子噪声。从某种意义上来说，量子光学也是量子信息(量子通信、量子密码术与量子计算)的基础，与此相关的各种光场量子态的制备与操纵、量子无损测量等也是量子光学的研究对象，而 20 世纪 60 年代出现的激光器(由相干态描写)则是量子光学的实验支柱。

由于量子光学自身显明的个性，研究它的数学物理方法也与别的物理学分支有所不同。这方面的内容在 W H Louisell 的《辐射的量子统计性质》一书[3]中有较详尽的介绍，读者可以从此书中

了解到那个时期关于量子光学的一些主要理论。在 Louisell 的书出版以后,国际上陆续出现了不少介绍量子光学数理基础的优秀书籍,在若干具体问题上也取得一些进展,但基本框架与 Louisell 的书的思路相似。

笔者在 20 世纪 80 年代初就发现进入量子光场研究的捷径是从基本的坐标表象出发,构造 ket 与 bra 不互为共轭虚量的积分型投影算符 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{x}{\mu} \right\rangle \langle x \right|$,然后用有序算符内的积分技术积分之,便立即得到正规乘积形式的单模压缩算符。到了 90 年代,在建立了 EPR 纠缠态以后,笔者又发现用纠缠态 $|\eta\rangle$ 构造另一类积分型投影算符 $\int \frac{d^2\eta}{\pi} \left| \frac{\eta}{\mu} \right\rangle \langle \eta \right|$,再用有序算符内积分方法,就得到正规乘积形式的双模压缩算符,这样就自然地把压缩态与纠缠态联系了起来。所以,这可能是从量子力学到量子光学数理阐述的最佳途径。有序算符内的积分理论使得原来只适用于 c 数函数积分的牛顿-莱布尼兹规则现在也适用于量子力学中的算符积分,在这个意义上,它是符号法发展进程中的一个里程碑。

有序算符内的积分理论对量子光学特别有效的另一个原因是前者能把经典 c 数空间中的正则变换直捷地过渡到量子希尔伯特空间中算符的幺正变换,架起了经典力学与量子力学对应在变换方面的一座"桥梁"。这是对狄拉克奠定的量子力学中变换理论的一个重要补充。狄拉克本人生前十分珍惜与怀念在哥本哈根时度过的美好时光,在那段岁月中他发展了量子力学的物理解释(变换理论),这给了他很多快乐。他说:"我的许多论文是相当偶然的一种思绪袭来的结果。例如,我早期关于泊松括号的工作以及后续的关于相对论波动方程的工作都是非常确定地属于这种性质。它们是一个思想闪现的结果。我说不好它们是如何出现的,所以我觉得这类工作在相当程度上不应属于我的成功。与此相反,我关于量子力学的物理诠释的研究成功确实是非我莫属。……它奠定

了量子力学一般变换理论的基础,并提供了合适的符号用语的主要特点。……这些符号用语,经过一些小修正后,已经变成了目前量子力学的标准用语。”“变换理论是我的至亲……我对它恋恋不舍。”这些语句是笔者在国外访问讲学期间在图书馆中摘录下来的。西方大多数物理学家都知道狄拉克对自己工作的评价。1997年当笔者在奥地利因斯勃鲁克大学讲学介绍有序算符内的积分理论时,有位欧洲学者对物理学家潘建伟(当时他也在场)说,如果狄拉克还健在人世,他会感谢范洪义发展了符号法。

量子光学理论中存在着大量的变换[4],如平移变换、压缩变换、Wigner 变换;另一方面,量子光场中有很大一部分是非经典光场,需要引入各种 c 数表示(如 P 表示、Wigner 函数、正 P 表示、复 P 表示)来描述它们。正是有序算符内的积分理论与量子力学纠缠态表象,为这两方面研究的进展提供了捷径。

“科学理论的辩护要从它的美学价值上去寻找,科学方法的辩护要借助它的美学价值去获得。”希望读者通过学习本书的方法,既提高对狄拉克符号法中艺术美的欣赏能力,又“学会在自己的思想中能不参考数学形式而把握住物理概念”。另一方面,根据爱因斯坦的经验,“在物理学中,通向更深入的基本知识的道路是与最精密的数学方法相联系的。”笔者希望有兴趣的读者仁者见仁、智者见智地一起来发展量子力学与量子光学的数理基础理论。

爱因斯坦坚信这样的观点:“创造者只能记住最简单的解决办法,并坚信这种简单化同样应该使世界变成可知的世界。”有序算符内的积分理论对量子力学许多问题提供了相当简单的解决办法,尤其是对量子光学的许多表述、算符公式的推导带来极大的便利与直观,解决了若干以前令人束手无策的问题,也提出了许多新的课题并使之迎刃而解。由有序算符内的积分理论发现与建立的新表象,又可广泛地应用于固体物理、超导、热场动力学、量子统计力学、量子场论等理论,在尽可能广泛的范围内涵盖了表象最本质、最普遍的联系。

本书在写作方面尽量遵循狄拉克的言简意赅、一语中的的风格。诚如玻耳兹曼所说:“一个音乐家听几个小节就能认出莫扎特、贝多芬还是舒伯特。同样,一个数学家读几页就能看出是柯西、高斯、雅科比、赫姆霍茨还是基尔霍夫。”狄拉克的写作充分体现了“数学家感到有意义的规则正好就是自然界所选择的规则”,这也正是笔者撰写本书所追求的目标。

在本书以前,笔者已于 1997 年与 2002 年分别出版了《量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展》(以下简称书Ⅰ)与《量子力学纠缠态表象及应用》[5](以下简称书Ⅱ)两本书。前一本书阐述了有序算符内积分法的大量应用,丰富了符号法的内容,并使之更趋实用;后一本书在 EPR 量子纠缠的思想基础上建立了若干新的完备的纠缠态表象,并给出它们在量子光学、超导、量子统计、量子霍尔效应态矢量描述方面的应用,这些应用中有的完全是新的课题,有的则是用新观点重看老问题。正如天才的物理学家费恩曼所说:“用一种新观点来认识老事物,乃是一种乐趣。”本书的写作原则是:在写作内容方面基本上不重复前两本书已介绍过的东西,只是为了读者的方便,才扼要地介绍有序算符内的积分理论与基本的纠缠态表象。

本书的章节安排如下:第一章介绍如何从狄拉克的坐标表象引出有新意的话题,即有序算符内的积分技术。作为其应用的一个最简单也最实用的例子,自然地从经典尺度变换 $x\to x/\mu$ 导出量子光学中常用的单模压缩算符,并把量子力学的表象变换与小波变换联系起来。至于双模压缩变换的自然导出,应直捷地从纠缠态表象入手。由于量子纠缠的重要性,所以在第二章中讨论多种量子力学的两体纠缠态表象、其光学实现及若干应用。第三章用有序算符内的积分技术讨论量子光学的相干态,发现了它的若干重要的新性质,并自然地导致波动光学中的菲涅耳变换。第四章引入 Weyl 编序算符内的积分技术以发展纠缠态表象的 Wigner 算符理论。第五章致力于用纠缠态表象研究原子相干态,发现其

新特点。第六章到第八章介绍用有序算符内的积分技术和诱导纠缠态表象研究傅里叶光学中的各种变换，尤其是提出复的分数傅里叶变换，由纠缠态表象之间的变换导出汉克尔变换的核等。第九章用纠缠态表象研究热场动力学，以崭新的方式研究量子主方程。第十章提出操作相-关联振幅方面的量子纠缠的概念与在此意义下的 Wigner 函数和 Jaynes-Cummings 模型，它们都与纠缠态表象密切相关。第十一章介绍用有序算符内积分技术建立多粒子纠缠态表象，尤其是对于三粒子纠缠态，讨论其物理产生的机制。第十二章和第十三章给出了纠缠态表象在量子隐态传输、量子计算机元件——约瑟夫森结的理论研究中的应用。第十四章介绍用有序算符内积分技术导出若干新的算符正规乘积展开式，如 $\frac{1}{\hat{X}}$ 的展开，这里 $\hat{X}$ 是坐标算符。第十五章着重讨论把有序算符内积分技术推广到非线性相干态的领域。第十六章简要介绍受纠缠态表象启发而能求解的若干量子力学问题及“不变本征算符”方法。第十七章研究费米子压缩算符的重要性质。通过对这些内容的介绍和阐述，相信读者可以从一个更高的数学和物理的起点来看量子光学理论：原先量子光学算符排序问题及光场各种表示问题已经可以统一地用有序算符内积分技术来处理；量子纠缠的物理概念将随着纠缠态表象的建立更加深化。大数学家希尔伯特曾大胆建议用数学的公理化方法去演绎全部的物理学。笔者虽然对此未敢苟同，但是通过本书的写作却看到了狄拉克符号法的发展，其简洁性与逻辑严密性必将导致量子光学数理理论的进一步完善，并发挥更有效的作用，所谓文章到简方自然。

在阅读本书的同时，读者可以主要参考笔者的三篇评论性文章，一篇发表在 J. Opt. B: Quan. & Semiclass. Opt. 5 (2003) R147，这是一本专述量子光学的杂志；另两篇发表在 Int. J. of Mod. Phys. B18 (2004) 1387 和 Int. J. of Mod. Phys. B19 (2005) 799(与陆海亮合作)。

本书的部分内容曾在 2001 年向彭恒武先生、于敏先生、何祚庥先生、杨国桢先生、冼鼎昌先生和张宗烨先生作过介绍，得到他们的有益指教。值此机会表示衷心感谢。庆承瑞研究员给予笔者的鼓励令人难忘。笔者也怀念已故物理学家钱临照先生，他曾经在近 90 岁的高龄时向同行们介绍了笔者的工作。笔者也要再次感谢一贯支持我工作的中国科技大学朱清时校长、上海交通大学谢绳武校长、叶取源副校长及庞乾骏教授、《理论物理》杂志编辑部的程希有先生、中科院理论物理研究所的孙昌璞先生、山西大学的彭堃墀院士、梁九卿教授以及中国科技大学的阮图南教授、井思聪教授和刘秋雨教授。

写到所要感谢的人，笔者自然又想起了母亲。如果说我是一个勤奋工作的人、一个有同情心与正义感的人，那都是从母亲那里得来的。她老人家善行慈举、忍辱负重、勤恳操劳的情境常常浮现在我的眼前。她几乎从没有用言语来教我应该这样，应该那样，我所受到的都是她的身教。她的慈祥、含辛茹苦、任劳任怨的美德如春雨般滋润着我的心田。我也怀念岳母陈月仙，她的善良、坚强和勤劳，令人难忘。

爱因斯坦曾说："对于一个毕生努力追求一点真理的人来说，如果他看到有别人真正理解并欣赏自己的工作，那就是最美的回报了"。如果笔者撰写的几本书被人们认为尚有可取之处，那也可告慰九泉之下的母亲了。值得庆幸的是，笔者的六篇综述本人系列论文的评论性文章已为国际同行接受而发表了。

本书是在妻子翁海光的鼎力支持下写成的，其中所引用的论文中包括笔者与本科生、研究生们的工作，他们是陈俊华、傅亮、梁先庭、胡海鹏、姜年权、桂卫军、唐绪兵、陆海亮、李超、吴昊、高炜博、范悦、蒋中华，回忆与他们在一起讨论工作时的情景，交流各自研究的心得，是人生之一大快事。

第一章

狄拉克坐标表象与有序算符内积分技术、单模压缩算符

1.1 从狄拉克的坐标表象看符号法的进展方向

狄拉克符号法的基元是:bra 矢量$\langle \quad |$、ket 矢量$| \quad \rangle$和线性算符,它们都是抽象量。到如今,量子力学的基本规律都用它们来表达。抽象量可在其中被表达为普通数的方式称之为表象,它是狄拉克首创的理论。例如线性算符 $\hat{X}$ 在坐标表象中由其本征值 x 表达,$\hat{X}|x\rangle=x|x\rangle$;动量本征态在坐标表象中表达为$\langle x|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ipx}$;坐标本征态$|x'\rangle$在自身表象中表达为 δ 函数(该函数由狄拉克发明):

$$\langle x|x'\rangle=\delta(x-x')。\tag{1.1}$$

一个基矢量要构成表象,还需满足完备性(或超完备性)。对$|x\rangle$而言,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle x|=1。\tag{1.2}$$

上式反映了在全空间找到粒子的几率为 1,即(1.2)式是$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\psi^*(x)\psi(x)=1$ 的抽象形式。(1.2)式对于熟悉量子力学理论的人是一个常识。下面要提出一个貌似平庸,却又是非常识

的令人深思的问题，即在(1.2)式中把右矢$|x\rangle$改为$|\frac{x}{\mu}\rangle, \mu > 0$，直接积分：

$$S_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mu}} |\frac{x}{\mu}\rangle\langle x|, \quad \mu > 0 \tag{1.3}$$

的"值"是什么呢？这里要求直接积分的意思是排除那种想通过在(1.3)式两边取某种矩阵元而探索其结果，因为这种做法只是算了S_1这个算符的一个矩阵元。据笔者所知，或许是因为这个积分不起眼，因而被忽略了约半个世纪，在本书着手讨论它以前，以往的文献没有记载或讨论过如何直截了当地去对它积分。也根据笔者的经验，一旦向某个学生提出这个问题，其反应是起初认为很平凡，但思索一番后谁都认为是一个需要认真想一想才能解答的问题。由于(1.3)式是对算符$|\frac{x}{\mu}\rangle\langle x|$的积分，在数学上需要发明一个方法去实现这类 ket-bra 不对称的积分，因为这类积分在量子力学中数不胜数。而从物理观点看，应赋于积分(1.3)式以物理意义，即从(1.1)式看出S_1把$|x\rangle$态压缩为$\frac{1}{\sqrt{\mu}}|\frac{x}{\mu}\rangle$态，$S_1$应是一个单模压缩算符，这样就与量子光学中的压缩态直接联系起来。所以从(1.3)式明显看出经典变换$x \to \frac{x}{\mu}$对应了压缩变换。为了对(1.3)式积分，必须加深对狄拉克符号法的理解，设法去发展其独特的数学方法，尤其是赋于算符的积分规则，这就是有序算符内的积分技术，它把牛顿-莱布尼兹积分从对普通函数的积分推广到由狄拉克符号所组成的算符。

有序是指玻色算符排成一定的顺序，它们可以是正规、反正规或 Weyl 编序的。本章只讨论前者。所谓正规乘积，是指所有的产生算符都排在湮灭算符的左边。如吴大猷先生所指出："学或教量子力学，通常似有两种不同的态度及方法，一是由目前已建立的系统的数学形式的方法入手，这个途径，可以狄拉克的 The Prin-

ciples of Quantum Mechanics 为代表；一是沿着量子力学发展的过程而进入目前的阶段。作者由自己的学或教的经验，认为前者有演绎方法清晰的好处，但大多数初习者，会感觉到抽象的数学形式和物理观念关系间的神秘性，不知这样一个抽象的理论系统是如何建立的。”

这固然反映了狄拉克把物理融入数学的超人才能，把握和驾驭以简洁、优美的数学形式表达物理的非凡智慧，也向科研工作者提出一个挑战，如何使“这样一个抽象的理论系统”变得容易理解。在物理学中，通向更深入的基本知识的道路往往需要新的数学方法相扶持。如果能解决(1.3)式的数学问题，提出一个新的系统的行之有效的方法，将引出新的物理概念、新的态矢或新的变换。

1.2　坐标表象完备性的纯高斯积分形式

在解(1.3)式前，先看看从(1.1)式中能得到直接积分(1.2)式的新思路吗？由于$\langle x'|x\rangle=\delta(x'-x)$，故有

$$|x\rangle\langle x| = \delta(x-\hat{X})。\tag{1.4}$$

对其进行傅氏变换，并用$\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^{\dagger})$，$a$ 与$a^{\dagger}$分别是玻色湮灭与产生算符，满足对易关系$[a,a^{\dagger}]=1$，并记：　：表示正规乘积，得到

$$\begin{aligned}\delta(x-\hat{X}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp[\mathrm{i}p(x-\hat{X})] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left[\mathrm{i}p\left(x-\frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p :\exp\left[-\frac{1}{4}p^2+\mathrm{i}p\left(x-\frac{a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)+\mathrm{i}p\frac{a}{\sqrt{2}}\right]: \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}:\exp\left[-\left(x-\frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:。\end{aligned}\tag{1.5}$$

注意在$:\quad:$内部a与$a^\dagger$是对易的，因为$:a^\dagger a:=a^\dagger a=:aa^\dagger:$，即要把$:aa^\dagger:$中的$:\quad:$删去，必须事先把它写成$:a^\dagger a:$，再去掉$:\quad:$。这个性质十分重要，因为它提供了一个“调和”算符与数的明显界限的作用。在经典力学中处理的是数，而在量子力学中遇到的是一般互不对易的算符，而借助于正规乘积记号，就可以在若干种运算中把算符作为可对易的参数对待[6]。例如：$:a^\dagger a:=:aa^\dagger:$，$:a^{\dagger n}a^m:=:a^m a^{\dagger n}:$。

把(1.5)式代入(1.1)式，得到坐标表象完备性的高斯积分形式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\rangle\langle x|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}:\exp[-(x-\hat{X})^2]:=1。\quad(1.6)$$

这样就实现了对算符$|x\rangle\langle x|$的真正积分。用纯高斯积分形式来表达坐标表象的完备性，体现了狄拉克符号法的内在简洁美。

1.3　真空投影算子的正规乘积形式

从(1.6)式还可以导出另外一些有用的关系式。为此先回顾一下关于谐振子的Fock表象的基本知识。已知$a^\dagger a=N$是粒子数算符，它的本征态为$|n\rangle$，

$$|n\rangle=\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle,\quad N|n\rangle=n|n\rangle。\quad(1.7)$$

粒子态$|n\rangle$是正交归一的：

$$\langle n'|n\rangle=\delta_{n',n}。\quad(1.8)$$

粒子态的全部张成了Fock空间，形成完备性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1。\quad(1.9)$$

a与$a^\dagger$对$|n\rangle$态的作用分别是

$$a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle,\ a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\ a|0\rangle=0,\quad(1.10)$$

式中$|0\rangle$是真空态。把(1.6)式右边展开为

$$|x\rangle\langle x| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa^{\dagger}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right) : \exp(-a^{\dagger}a) : \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa-\frac{a^2}{2}\right)。\tag{1.11}$$

对照两边可见$:\exp(-a^{\dagger}a):$一定可以写为某个投影算符,即:$:\exp(-a^{\dagger}a):=|\quad\rangle\langle\quad|$。注意到$a^{\dagger}|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$,

$$:\exp(-a^{\dagger}a):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{\dagger n}a^n}{n!},\tag{1.12}$$

$$a^{\dagger n}a^n=\sum_{n=0}^{\infty}a^{\dagger n}|n\rangle\langle n|a^n=N(N-1)\cdots(N-n+1),\tag{1.13}$$

可得

$$\begin{aligned}:\exp(-a^{\dagger}a):&=\sum_{n}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}N(N-1)\cdots(N-n+1)\\&=1-N+\frac{1}{2!}N(N-1)-\frac{1}{3!}N(N-1)(N-2)\cdots\\&=(1-1)^N=0^N。\end{aligned}\tag{1.14}$$

0^N只有作用在真空态$|0\rangle$上才有可能不为零,故有

$$\begin{aligned}&:\exp(-a^{\dagger}a):=|0\rangle\langle 0|,\\&:\exp(-a^{\dagger}a):|0\rangle=|0\rangle。\end{aligned}\tag{1.15}$$

(值得提到的是,在文献[3]中,Louisell 曾给出$|0\rangle\langle 0|=\lim\limits_{\varepsilon\to 1}\exp(-\varepsilon a^{\dagger}a)$。下面还要给出比(1.15)式更为严格的证明。)把(1.15)式代入(1.11)式,可知$|x\rangle$在 Fock 空间中的表示为

$$|x\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa^{\dagger}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle。\tag{1.16}$$

类似于(1.5)式,从$|p\rangle\langle p|=\delta(p-\hat{P})$可以导出

$$|p\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{p^2}{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}pa^{\dagger}+\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle。\tag{1.17}$$

1.4　玻色算符在正规乘积内的性质

通过上节的计算，可以总结出关于玻色算符相对于正规乘积的主要性质。不失一般，玻色算符函数一般可写为

$$f(a,a^\dagger) = \sum_k \cdots \sum_n a^{\dagger k} a^l a^{\dagger m} \cdots a^n A(k,l,m,\cdots,n),$$

式中 $k,l,m,\cdots,n$ 是正整数或零。如用 $[a,a^\dagger]=1$ 把所有的产生算符都移到湮灭算符之左，这时的 $f(a,a^\dagger)$ 被称为已排列成正规乘积形式，可把它们纳入：　：之中。正规乘积有一些主要性质（它们在相当长时期内被忽略了，而它恰恰能用来发展量子力学的表象与变换理论）。

（1）在正规乘积内部玻色算符相互对易。为什么原本不对易的 $a^\dagger$ 与 a 在：　：内部可交换呢？其原因是当把已正规乘积化的算符函数 $:g(a^\dagger,a):$ 两边的：　：脱去（或称脱去"外衣"：　：）时，必须事先把所有的 $a^\dagger$ 都移到 a 的左边；反之，只有当上述条件得到满足时，才能"穿上外衣"。穿上了"外衣"后，内部的 a 与 $a^\dagger$ 在交换时就是任意的。但要注意，在一个等式两边，不能随便地同时穿上"外衣"，例如 $aa^\dagger = a^\dagger a+1$，但是，$:aa^\dagger: \neq :a^\dagger a:+1$，而是 $:aa^\dagger: = a^\dagger a = :a^\dagger a:$。

这条性质提供了一个把算符部分地作为 c 数处理的契机，即引出正规乘积性质。

（2）可以对正规乘积内部的 c 数进行积分（或微分）运算，只要积分是收敛的。这是因为由性质（1），a 与 $a^\dagger$ 可以作为积分参量。

（3）正规乘积内的正规乘积记号可以取消；或在：　：内部的任意两个算符（相邻的或不相邻的）紧外边可以加上正规乘积记号。

（4）真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积形式是

$$|0\rangle\langle 0| = :\exp(-a^{\dagger}a):。\tag{1.18}$$

其严格证明如下。

由粒子态的完备性(1.9)式得

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \sum_{n,m=0}^{\infty}|n\rangle\langle m|\delta_{n,m} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}|n\rangle\langle m|\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n}x^{m}|_{x=0} \\ &= \exp\left(a^{\dagger}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)|0\rangle\langle 0|\mathrm{e}^{xa}|_{x=0}。\end{aligned}\tag{1.19}$$

设$|0\rangle\langle 0|$的正规乘积形式是$:W:$，W待定，代入(1.19)式得

$$1 = \exp\left(a^{\dagger}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right):W:\mathrm{e}^{xa}|_{x=0},\tag{1.20}$$

式中$:W:$的左边为产生算符，右边为湮灭算符，故(1.20)式右边已是正规乘积，可以完全括在$:\ :$内部，再用性质(1)与(2)完成微分运算，得到

$$\begin{aligned}1 &= :\exp\left(a^{\dagger}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)W\mathrm{e}^{xa}:|_{x=0} \\ &= :\mathrm{e}^{a^{\dagger}a}W: = :\mathrm{e}^{a^{\dagger}a}:W::,\end{aligned}\tag{1.21}$$

可知$|0\rangle\langle 0| = :W: = :\exp(-a^{\dagger}a):$。

(5) 正规乘积内部算符函数的和差可以分拆，即

$$:(W\pm V): = :W:\pm :V:。$$

注意两个正规乘积算符函数之积一般不再是正规乘积。

(6) 厄米特共轭操作可以进入$:\ :$内部进行，即

$$(:W\cdots V:)^{\dagger} = :(W\cdots V)^{\dagger}:。$$

(7) 由性质 (1)可知

$$:\frac{\partial}{\partial a}f(a,a^{\dagger}): = [:f(a,a^{\dagger}):,a^{\dagger}],\tag{1.22}$$

$$:\frac{\partial}{\partial a^{\dagger}}f(a,a^{\dagger}): = [a,:f(a,a^{\dagger}):]。\tag{1.23}$$

读者可思考以下两个问题：

在反正规乘积内(即当所有产生算符在湮灭算符之右时称为反正规乘积)玻色算符对易吗?

在正规乘积内部,费米算符应该有什么性质?

1.5　有序算符内的积分技术与单模压缩算符的自然导出

由正规乘积的性质可联想到,只要能把 ket-bra 型的投影算符化成正规乘积,则由于其内部的玻色算符皆对易,可被看作积分参量,就可以实现对真正的 c 数的积分。当然,在积分中和在积分后都存在$:\ :$。若要"脱去"它,只需把内中的产生算符都排到湮灭算符的左边即可。称此技术为正规乘积内的积分技术。

下面试用这一技术积分(1.3)式。用(1.18)式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\mu^2}+\sqrt{2}\,\frac{x}{\mu}a^{\dagger}-\frac{1}{2}a^{\dagger 2}\right)$$
$$\cdot|0\rangle\langle 0|\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa-\frac{1}{2}a^2\right)。\tag{1.24}$$

上式中的两个指数算符相互不对易,因而积分困难。现在把$|0\rangle\langle 0|=:\exp(-a^{\dagger}a):$代入,可见其左边皆为产生算符,右边皆为湮灭算符,因此整个被积的算符函数是排成正规乘积的,就可以穿上"外衣"$:\ :$。再根据正规乘积内玻色算符可对易的性质,三个指数算符具有可加性而合并成一个指数算符,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu\pi}}:\exp\left[-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}x\left(a+\frac{a^{\dagger}}{\mu}\right)-\frac{1}{2}(a+a^{\dagger 2})\right]:。\tag{1.25}$$

再用正规乘积性质(2)对上式积分,在积分过程中视 a 与 $a^{\dagger}$ 为参量,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda:\exp\left[-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right.$$

$$+(\mathrm{sech}\lambda-1)a^{\dagger}a+\frac{a^2}{2}\tanh\lambda\Big]:, \tag{1.26}$$

式中已令

$$\mu=\mathrm{e}^{\lambda},\quad \frac{2\mu}{1+\mu^2}=\mathrm{sech}\lambda,\quad \frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}=\tanh\lambda。 \tag{1.27}$$

这样就对(1.3)式真正地实现了积分。为了继续脱去(1.26)式中的：　：“外衣”，可以用算符公式

$$\exp(\lambda a^{\dagger}a)=:\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^{\dagger}a]:。 \tag{1.28}$$

这个公式在文献[3]中能找到。这里给出一个极简便的证明。用(1.9)式、(1.18)式和正规乘积性质，得

$$\exp(\lambda a^{\dagger}a)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}|n\rangle\langle n|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{\dagger n}}{n!}|0\rangle\langle 0|a^n\mathrm{e}^{\lambda n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}:\frac{1}{n!}(\mathrm{e}^{\lambda}a^{\dagger}a)^n\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}:=:\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^{\dagger}a]:,$$

利用(1.28)式可将(1.26)式改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|=\exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)\exp\left[\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)\ln\mathrm{sech}\lambda\right]$$

$$\cdot\exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh\lambda\right)。 \tag{1.29}$$

这就是单模压缩算符，它是从经典变换 $x\to\frac{x}{\mu}$ 诱导出来的量子幺正算符。注意到

$$\left[\frac{a^2}{2},\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]=a^{\dagger}a+\frac{1}{2},\ [a^2,a^{\dagger}a]=2a^2,[a^{\dagger 2},a^{\dagger}a]=-2a^{\dagger 2}$$

形成封闭的李代数[称为 $SU(1,1)$ 代数]，具有某种对称性，就能知道用有序算符内的积分技术可以揭示出狄拉克表象理论中更深层次的美，尽管在没积分以前 $\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|$ 中左矢与右矢是不对称的。

在(1.25)式中当 $\mu=1$，它变成：

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x:\exp[-(x-\hat{X})^2]:=1。 \tag{1.30}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式：

$$e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots \tag{1.31}$$

并记 $S_1\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|$，可以导出

$$S_1aS_1^{-1}=a\cosh\lambda+a^{\dagger}\sinh\lambda。\tag{1.32}$$

这就是文献中常出现的 Bogolyubov 变换，它在量子光学中被称为单模压缩变换，[4]、[5]也被广泛地应用于原子核理论、超导理论中。因此，对 $\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|$ 的直接积分导出引起 Bogolyubov 变换的算符，可见狄拉克的表象有更深层次的应用，具有普适性。

上述讨论也表达了从经典 c 数变换 $x\rightarrow\frac{x}{\mu}$（称为标度变换）诱导出的量子力学压缩变换，即

$$S_1\hat{X}S_1^{-1}=\mu\hat{X},\quad S_1\hat{P}S_1^{-1}=\frac{\hat{P}}{\mu}。\tag{1.33}$$

体现出用有序算符内的积分技术顺利地实现经典变换向量子幺正变换过渡的简洁。

德国大文豪歌德曾说：“我们必须把科学当艺术，然后我们才能够从科学得到完整的知识——一切我们的想像和见解，以及数学、物理学的深奥和正确、高超的理性和见解，活泼的幻想和欢喜的感觉，都是研究的不可缺少的因素”。狄拉克符号法理论的自洽完备性、逻辑严密性与表达的抽象简洁堪称为理论物理中科学与艺术相结合的典范，是狄拉克抓住了量子力学的本质，按照简洁与美的要求构思出来的。“理论物理学家的工作，就是以漫长一生来追求数学美。”

通过对(1.3)式的积分，可进一步看到应用狄拉克表象的潜力，也找到了一条使“这样一个抽象的理论系统”变得易于被理解

的途径。初学者在掌握了有序算符内的积分理论后，就可以对表象的完备性不但知其然，而且知其所以然。作为练习，读者可试做以下几个积分题：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} dx |-x\rangle\langle x|$。

(2) $\iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 |x_2, x_1\rangle\langle x_1, x_2|$。

(3) $\int d^3\boldsymbol{x} |R\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|$，$R$ 是一个 3×3 的欧拉转动矩阵：

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}。$$

(4) 求证在动量表象中完备性的纯高斯积分型为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dp \,:\exp[-(p-\hat{P})^2):=1。$$

(5) 求单模压缩算符 S_1 的动量表象。

(6) 求证：

① $\exp(f\hat{X}^2)=\frac{1}{\sqrt{1-f}}:\exp\left(\frac{f}{1-f}\hat{X}^2\right):$。

② 设 $f=-\frac{1}{2}(s^2-1)$，求证：$\exp(f\hat{X}^2)|0\rangle$是一个单模压缩态，压缩参数为 s。

(7) 求 $\hat{X}^n=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger)\right]^n$ 的正规乘积展开。

1.6　量子光学压缩态(单模情形)

把(1.29)式两边作用于真空态，即得量子光学的压缩态：

$$S_1|0\rangle = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda \exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)|0\rangle。\quad (1.34)$$

（当 $\tanh\lambda=1$，此为在 x 方向压缩的极大压缩态。）此态的波函数

$$\langle x|S_1|0\rangle = \langle x|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x'}{\mu}\right\rangle\langle x'|0\rangle = \mu^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\delta\left(x-\frac{x'}{\mu}\right)\langle x'|0\rangle$$

$$= \sqrt{\mu}\langle \mu x|0\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\mu}\exp\left(-\frac{\mu^2 x^2}{2}\right)。\quad (1.35)$$

对照单模光场的经典描述（电场振动由振幅、频率、相位描述）：

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{r},t) &= E\cos(\omega t-\varphi_0)v(\boldsymbol{r}) \\ &= E(\cos\varphi_0\cos\omega t+\sin\varphi_0\sin\omega t)v(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha e^{-i\omega t}+\alpha^* e^{i\omega t})v(\boldsymbol{r}), \end{aligned}\quad (1.36)$$

式中已令

$$\begin{aligned} E\cos\varphi_0 &= \frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*) \equiv \alpha_1, \\ E\sin\varphi_0 &= \frac{1}{2i}(\alpha-\alpha^*) \equiv \alpha_2, \end{aligned}\quad (1.37)$$

式中，电场振幅 $E=\sqrt{\frac{\hbar\omega n}{\varepsilon_0 V}}$，$n$ 是光子数，体积 $V=\int|v(\boldsymbol{r})|^2 d^3\boldsymbol{r}$，$\varepsilon_0$ 是真空介电常数。(1.37)式中 α_1 与 α_2 称为场的两个正交分量，因为它们分别以 $\cos\varphi_0$ 与 $\sin\varphi_0$ 的面目出现，相位差为 $\frac{\pi}{2}$。

在量子光学中，电场是算符，相应的两个正交分量也是算符，由 $\alpha\to a, \alpha^*\to a^\dagger$，得

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(a+a^\dagger),\quad \hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(a-a^\dagger)。\quad (1.38)$$

$[\hat{X}_1,\hat{X}_2]=\frac{i}{2}$，可见它们是一对共轭量。所以可用相当于粒子坐标或动量的物理量描述光场。由海森伯测不准关系，其均方涨落需满足关系

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \geqslant \frac{1}{4},\quad (\Delta\hat{X}_i)^2 = \langle(\hat{X}_i-\langle\hat{X}_i\rangle)^2\rangle。\quad (1.39)$$

对于单模压缩真空态：

$$\langle 0|S_1^\dagger \hat{X}_1 S_1|0\rangle = 0,\quad \langle 0|S_1^\dagger \hat{X}_1^2 S_1|0\rangle = \frac{\mu^2}{4},\tag{1.40}$$

$$\langle 0|S_1^\dagger \hat{X}_2 S_1|0\rangle = 0,\quad \langle 0|S_1^\dagger \hat{X}_2^2 S_1|0\rangle = \frac{1}{4\mu^2}。\tag{1.41}$$

由此给出均方差 $\Delta\hat{X}_1=\frac{\mu}{2}$，$\Delta\hat{X}_2=\frac{1}{2\mu}$，表明压缩态的一个正交分量具有比相干态小的量子起伏，其代价是另一正交分量的量子起伏增大。

1.7 量子力学态矢的小波变换[7]

小波变换是信号分析的一种有用工具。小波定义为一个局域波，而它又在振动着，其局域条件为当 $|x|\to\infty$ 时，函数 $\psi(x)$ 急剧地衰减。数学上，这要求[8]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{d}x = 0。\tag{1.42}$$

这称为局域波条件。在小波变换理论中，有一个称为母小波的概念，因为由它可以派生出小波的一个家族 $\psi_{(\mu,s)}$（μ 称为标度参数，$\mu>0$；s 是平移实参数）：

$$\psi_{(\mu,s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\psi\left(\frac{x-s}{\mu}\right)。\tag{1.43}$$

用有序算符内的积分技术(IWOP)可从量子力学幺正变换的观点讨论小波变换，从而可以实现对于态矢量的小波变换。通常，定义一个信号函数 $f(x)$ 相对于 ψ 的小波变换为

$$W_f(\mu,s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi^*\left(\frac{x-s}{\mu}\right)\mathrm{d}x。\tag{1.44}$$

从量子力学的观点，上式可改写为

$$W_f(\mu,s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\psi|\frac{x-s}{\mu}\rangle\langle x|f\rangle\mathrm{d}x,\tag{1.45}$$

式中，$\langle\psi|$是相对于给定的母小波的态矢，$|f\rangle$是需要作变换的态矢，$|x\rangle$是坐标本征矢。用 IWOP 技术积分：

$$
\begin{aligned}
U(\mu,s) &\equiv \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left|\frac{x-s}{\mu}\right\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x \\
&= \exp\left[\frac{-s^2}{2(1+\mu^2)}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda-\frac{sa^{\dagger}}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}\lambda\right] \\
&\quad\cdot\exp\left[\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{sech}\lambda\right] \\
&\quad\cdot\exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh\lambda+\frac{sa}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}\lambda\right)。
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

于是可以定义量子力学态矢量$|f\rangle$的小波变换是

$$
{}_M\langle\psi|U(\mu,s)|f\rangle,\tag{1.47}
$$

式中${}_M\langle\psi|$是母小波态矢。例如当母小波取为“墨西哥帽”的形式：

$$
\psi_M(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)(1-x^2),\tag{1.48}
$$

它满足局域性条件$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\psi_M(x)=0$。可以推出相应的态矢量是

$$
|\psi\rangle_M=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{4}}(1-a^{\dagger 2})|0\rangle,\tag{1.49}
$$

而局域性条件可以改写为

$$
\langle p=0|\psi\rangle_M=0,\tag{1.50}
$$

式中$\langle p=0|$是动量值为 0 的动量本征态。用(1.47)、(1.49)和(1.46)式，可导出真空态$|0\rangle$的小波变换是

$$
\begin{aligned}
{}_M\langle\psi|U(\mu,s)|0\rangle &= \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{2}\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda\exp\left[-\frac{s^2}{2(1+\mu^2)}\right] \\
&\quad\cdot\left(1+\tanh\lambda-\frac{s^2}{2}\operatorname{sech}^2\lambda\right)。
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

有兴趣的读者可自己求相干态$|z\rangle$的小波变换。

以下看一看局域性条件(1.50)式的解是什么。不失一般，设母小波$|\psi\rangle_M$的一般形式为

$$|\psi\rangle_M = G(a^\dagger)|0\rangle,\quad G(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n a^{\dagger n},\tag{1.52}$$

则条件(1.50)式变为(用相干态的完备性)

$$\begin{aligned}
\langle p=0|G(a^\dagger)|0\rangle &= \langle p=0|\int \frac{d^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z|G(a^\dagger)|0\rangle \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}}\int \frac{d^2 z}{\pi} G(z^*)\exp\left(-|z|^2+\frac{z^2}{2}\right) \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}}\int \frac{d^2 z}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{*n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m}}{m!2m}\exp(-|z|^2) \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} g_n \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{2^m m!} n!\delta_{n,2m} \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{m=0}^{\infty} g_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!} \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}}\sum_{m=0}^{\infty} g_{2m} = 0。
\end{aligned}\tag{1.53}$$

特别地，当 $m=0, g_0=1; m=1, g_2=1$；其余的 g_{2m} 为零，就可得出(1.49)式。取(1.53)式中不同的 g_{2m}，就可得到不同的母小波，并用它们作新的小波变换。

本书将在第三章中继续讨论双模空间中的复小波变换。

习　　题

1. 求单模压缩算符 $\exp\left(\frac{\zeta}{2}a^{\dagger 2}-\frac{\zeta^*}{2}a^2\right)\equiv S(\zeta)$ 作用于单光子 Fock 态 $|1\rangle$ 所产生的态是

$$S(\zeta)|1\rangle = \text{sech}^{\frac{3}{2}}|\zeta|\exp\left(\frac{a^{\dagger 2}}{2}\text{th}|\zeta|e^{i\varphi}\right)|1\rangle \equiv |f,\varphi\rangle_1,$$

式中 $\sqrt{f}=\tanh|\zeta|, \zeta=|\zeta|e^{i\varphi}$。求证：

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 df\frac{1}{(1-f)^2}\int_0^{2\pi}d\varphi|f,\varphi\rangle_{11}\langle f,\varphi| = \sum_{n=0}^{\infty}|2n+1\rangle\langle 2n+1|。$$

(参见 Commun. Theor. Phys. 32(1999)471)

2. 续上题。记

$$|f,\varphi\rangle_0 \equiv S(\zeta)|0\rangle,$$

求证：

$$|f,\varphi\rangle_0 = (1-f)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\frac{a^{\dagger 2}}{2}\sqrt{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)|0\rangle,$$

并讨论$|f,\varphi\rangle_0$在压缩参数空间中的完备性结构。

3. 求坐标算符函数

$$\frac{\hat{X}}{\mathrm{e}^{\hat{X}}-1}$$

的正规乘积展开。

提示：用级数展开$\dfrac{\hat{X}}{\mathrm{e}^{\hat{X}}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}\hat{X}^n$，式中$B_n$是Bernoulli数，

$$B_n=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}},$$

式中围道c是绕原点、半经$|z|<2\pi$的圆，从而能避开在$\pm 2\pi\mathrm{i}$处的极点。

4. 求相干态$|z\rangle$的小波变换，母小波是“墨西哥帽”小波。

5. 试推导Pauli自旋算符的玻色表示，即在由粒子数态$|n\rangle$张成的Fock空间中：

$$\sigma_-=\sum_{n=0}^{\infty}|2n\rangle\langle 2n+1|,$$

$$\sigma_+=\sum_{n=0}^{\infty}|2n+1\rangle\langle 2n|,$$

$$\sigma_3=(-1)^{N+1},\quad N=a^{\dagger}a。$$

(参见 Shigefumi Naka, Prog. Theor. Phys. 59 (1978) 2107)

6. 求指数算符$\exp(g\sqrt{1-\hat{X}^2}\hat{P})$的正规乘积展开式。

第二章

两体纠缠态表象及若干应用

2.1 “剪不断,理还乱”的量子纠缠

1935年,Einstein, Podolsky和Rosen(EPR)向现行量子力学挑战,指出波函数所提供的物理实在的量子力学描述是不完备的。EPR关于“完备”的定义是:“物理实在的每一个元素必须有其相应的对应存在于物理理论中。”那么,什么是物理实在呢?他们的标准是:“如果在不以任何方式干扰一个系统的情况下,人们可以确定地(几率为1)预言一个物理量的值,那么就存在相应于这个物理量的物理现实的一个元素。”

根据这些约定,EPR举例说,如果系统的一个态ψ是一个可观测量A的一个本征函数,本征值为a,那么相应于物理量A就存在物理实在的一个元素。但如果ψ不是本征函数,就不再能说物理量A有一个特殊值,由于在量子力学中坐标与动量算符不对易,所以当某粒子的动量是已知的,那么其坐标就不是物理实在。由此推论:“或者是①由波函数表述的有关物理实在的量子力学是不完备的;或者是②当相应于两个物理量的算符不对易时,该两个量不能同时为物理实在。”

EPR更具体地指出量子力学中的一个矛盾。考虑两个系统Ⅰ与Ⅱ,它们在$t=0$到$t=T$时段内相互作用。用薛定谔方程可以从$t=0$时两个系统的状态算出以后时刻的总系统的状态Ψ,但是不能算出相互作用后各个系统的态。理由是一般而言,

Ψ(Ⅰ,Ⅱ)将是相对隶属于系统Ⅰ的物理量的本征态的混合。如果人们测量相互作用后系统Ⅰ的量 A,就投影出某个本征态 ψ_k(Ⅰ)带本征值 a_k,于是也把 Ψ(Ⅰ,Ⅱ)约化为一个单项,其系数是相互作用后系统Ⅱ的波函数 ψ_k(Ⅱ)。另一方面,人们测量量 B,可投影出本征态 ψ_l(Ⅱ)带本征值 b_l,于是可下结论说第一个系统处于态 ψ_l(Ⅰ)。

关键在于,人们能够对系统Ⅰ的同一量 A 进行两次测量并得到系统Ⅱ的两个不同的波函数。但是既然两个系统中不再存在相互作用,第二个系统不会发生真正的改变,于是可得出结论:不能给同一个物理实在赋于两个不同的波函数。而且,对系统Ⅰ与Ⅱ进行测量分别得到的量 A 与 B,它们会造成第二个系统波函数 ψ_k(Ⅱ)或 ψ_l(Ⅱ),原则上可能是不对易的。EPR 考虑两个粒子的波函数

$$\Psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{2\pi\mathrm{i}}{\hbar}(x_1-x_2+x_0)p\right]\mathrm{d}p, \tag{2.1}$$

式中 x_0 为一常数。当第一个粒子处于 ψ_p(Ⅰ)(动量本征函数)时,则 Ψ 变成

$$\Psi(x_1,x_2)=\int\psi_p(\text{Ⅱ})\psi_p(\text{Ⅰ})\mathrm{d}p, \tag{2.2}$$

式中 $\psi_p(\text{Ⅱ})=\exp\left[-\frac{2\pi\mathrm{i}}{\hbar}(x_2-x_0)p\right]$,它是动量为 p 的动量算符 P 的本征函数。现取位置算符 X,定出 $\psi_r(x_1)=\delta(x_1-x_2)$为第一个粒子的坐标的本征函数,则第二个粒子的坐标的本征函数为 ψ_r(Ⅱ),于是本征函数 ψ_r(Ⅱ)与 ψ_p(Ⅱ)现在都在描述第二个系统,但它们属于互不对易的算符,这表明这个已与Ⅰ分离开的系统Ⅱ在测量它之前就不能有一个确定的态了。EPR 由此作出结论:现行量子力学是不完备的。

人们还可以从另一角度阐述爱因斯坦等三人对量子力学的质疑。设想电子与正电子的湮灭成一对光子(一种能量转化的过程),它们各自以光速运动而分离,各行其道。现设有人在测量第

一个光子产生时的时刻(由于两个光子是孪生的,它们同时产生,由此也就知道了第二个光子产生的时刻),按照海森堡测不准关系,该测量者就不能精确确定其在这一时刻的能量。但对第二个光子,是可以在这一时刻很精确地测量其能量的(其代价是不测量其产生的时刻)。由于两个光子的能量的总和是可以从电子-正电子的湮灭机制而计算出来的,因此第一个光子的能量也是能推算得到的。这样,对于第一个光子而言,人们既可以精确地知道其产生的时刻,又可以同时知道其能量,从而悖逆海森堡测不准关系。

这样的责难使物理学家捉襟见肘。按照爱因斯坦的相对论,既然不存在超光速的相互作用使这两个光子相互影响,是否还存在某种人们还不知道的方式,一种“隐变量”,使得两个粒子间互相沟通,产生测量其中的一个就可以推算另一个的效果呢?物理学家贝尔(Bell)天才地用数学推理建立了有关隐变量的理论[9]。

但是,由此理论构思出来的想像实验和真实的实验结果并不支持存在“隐变量”的观点。

尽管以玻尔为首的哥本哈根学派不同意爱因斯坦等三人的观点,并予以反驳,指出所谓一个体系“不以任何方式干扰”另一个体系的含糊性;尽管这些争论及与这些争论相关的实验不太支持 EPR 对量子力学不完备的责难,但 EPR 关于量子关联(或量子纠缠)的思想却从此沿袭了下来,即两个系统在过去因发生相互作用而形成的复合体系一旦分离后,不管其相距如何遥远,对其中之一进行测量就会提供另一系统的信息;对系统Ⅰ的不同性质的测量(相应的算符可不对易)就能预知系统Ⅱ的相应的不同的信息。这种量子“怪异性”使人不由想起唐代诗人李商隐的名句:“身无彩蝶双飞翼,心有灵犀一点通”。也使人觉得用南唐后主李煜的“剪不断,理还乱”来描写量子纠缠也许是很恰到好处的。无怪乎玻尔发出这样的感叹:“谁要是不为量子理论所震惊,谁就不理解量子理论”。但恰恰是量子纠缠这一思想成为现在人们广为关注的量子信息论、量子计算的研究基础,也促成笔者建立起若干有用的连续

纠缠态表象。在笔者所著的书Ⅱ中，笔者利用了书Ⅰ中介绍的有序算符内的积分技术，建立和发展了连续纠缠态表象理论。它的引进不仅仅是为了便于讨论一些物理问题或是追求形式上的美，更主要的是量子纠缠行为只有在此类表象内才“得其所哉”，被深刻地说明；很多复杂的计算可以在此表象内进行简捷的定量计算而得以完成；一些新的纠缠态及其有趣的性质才能得以进一步地揭示。在书Ⅱ中，连续纠缠态表象已被广泛地应用于研究量子光学的压缩态、操作相算符、Wigner 函数、解量子主方程、电子在磁场中运动、描写量子霍尔效应的拉夫林态、超导约瑟夫森结、量子场论中的复标量场等领域。

2.2　双粒子纠缠态表象的基本性质

两粒子相对坐标 X_1-X_2 与总动量 P_1+P_2 的共同本征态是[10][11]

$$|\eta\rangle=\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta a_1^{\dagger}-\eta^* a_2^{\dagger}+a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\right)|0,0\rangle, \tag{2.3}$$

式中 $\eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2$。用

$$|0,0\rangle\langle 0,0|=:\exp(-a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2):, \tag{2.4}$$

可以方便地证明其完备性

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|=&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}:\exp(-|\eta|^2+\eta a_1^{\dagger}-\eta^* a_2^{\dagger}+a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\\&+\eta^* a_1-\eta a_2+a_1a_2-a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2):\\=&1,\end{aligned} \tag{2.5}$$

式中 $\mathrm{d}^2\eta=\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2$。不难证明其正交性：

$$\langle\eta'|\eta\rangle=\pi\delta(\eta_1'-\eta_1)\delta(\eta_2'-\eta_2)。 \tag{2.6}$$

事实上，$|\eta\rangle$满足如下的本征矢方程：

$$(a_1-a_2^{\dagger})|\eta\rangle=\eta|\eta\rangle,\quad (a_1^{\dagger}-a_2)|\eta\rangle=\eta^*|\eta\rangle。 \tag{2.7}$$

所以从(2.7)式立即可得到(2.6)式，由

$$X_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i + a_i^\dagger), \quad P_i = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}(a_i - a_i^\dagger), \tag{2.8}$$

立刻可见

$$(X_1 - X_2)|\eta\rangle = \sqrt{2}\eta_1|\eta\rangle,$$
$$(P_1 + P_2)|\eta\rangle = \sqrt{2}\eta_2|\eta\rangle, \tag{2.9}$$

即 η 的实部与虚部分别是 $X_1 - X_2$ 与 $P_1 + P_2$ 的本征值。从(2.5)、(2.6)式可见 $|\eta\rangle$ 完全有资格作为一个新的基本的量子力学表象。这个表象将会有广泛的物理应用，除了在本书涉及的量子光学领域，它在凝聚态物理（如描述量子霍尔效应、量子场论）都有广泛的应用，但这些超出了本书的范围，故不作讨论。

在量子力学中解动力学问题时，求解薛定谔方程等价于对角化该系统的哈密顿量，这个使之对角的"基矢"构成了一个表象。所以表象既有经典力学中运动学的意义，也具有动力学的应用。选好了一个合适的表象并在此表象内思维与计算，可以节约思维量与计算的工作量，也能使物理概念更加清晰。所以要引入连续变量的纠缠态表象，而这在国外的量子力学书中尚未有提及。$|\eta\rangle$ 的纠缠性可以通过其在动量表象中的 Schmidt 分解给予进一步说明[12]：

$$\left|\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)\right\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,|p+\eta_2\rangle_1 \otimes |-p\rangle_2 \exp(-\mathrm{i}\eta_1 p)。 \tag{2.10}$$

可见当测量粒子 1 的动量发现它处于动量本征态 $|p\rangle_1$ 时，粒子 2（不管它处于何地）就处于动量本征态 $|\eta_2 - p\rangle_2$ 上；另一方面，$|\eta\rangle$ 在坐标表象中可分解为

$$\left|\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)\right\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_1 \otimes |x-\eta_1\rangle_2 \exp(\mathrm{i}x\eta_2)。 \tag{2.11}$$

注意相因子 $\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)$ 对于讨论 $|\eta\rangle$ 蕴涵的关于相-振幅方面

的纠缠性时是不可缺的。)

上式说明当粒子 1 处于其坐标本征态 $|x\rangle_1$ 时，粒子 2 同时处于其坐标本征态 $|x-\eta_1\rangle_2$ 上，而这两个粒子已相距遥远。为什么粒子 1 从处于动量本征态变为处于坐标本征态会使得粒子 2 也作相应的状态改变呢？这正是量子纠缠的一个具体体现，使人感到量子怪异性(weird)。

2.3 双模纠缠算符

从 $|\eta\rangle$ 的纠缠性可以导出：一类纠缠算符，把 $e^{iP_1X_2}$ 作用于 $|\eta\rangle$ 态，并用(2.9)式及 $P_i|x\rangle_i=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x\rangle_i$，${}_i\langle x|p\rangle_i=\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}$，得到

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}P_1X_2)|\eta\rangle &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp[\mathrm{i}P_1(x-\eta_1)]|x\rangle_1 \\ &\quad\otimes|x-\eta_1\rangle_2\exp(\mathrm{i}\eta_2 x) \\ &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)|x=\eta_1\rangle_1\otimes\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_2\exp(\mathrm{i}\eta_2 x) \\ &= \sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)|\eta_1\rangle_1\otimes|p=\eta_2\rangle_2,\end{aligned} \tag{2.12}$$

式中第二模为动量本征态，第一模为坐标本征态。由此可见

$$\exp(-\mathrm{i}P_1X_2)\sqrt{2\pi}\,|x\rangle_1\otimes|p\rangle_2=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)|\eta\rangle,$$

$$\eta_1=x,\quad \eta_2=p。\tag{2.13}$$

可见 $\exp(-\mathrm{i}P_1X_2)$ 是一个纠缠算符，它把一个坐标本征态与一个动量本征态纠缠为 $|\eta\rangle$ 态。类似地有

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}P_2X_1)|\eta\rangle &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_1\otimes\exp(\mathrm{i}P_2x)|x-\eta_1\rangle_2\exp(\mathrm{i}\eta_2x) \\ &= \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\eta_2\eta_1}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_1\exp(\mathrm{i}\eta_2x)\otimes|-\eta_1\rangle_2 \\ &= \sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2}\right)|p=\eta_2\rangle\otimes|-\eta_1\rangle_2,\end{aligned} \tag{2.14}$$

所以 $\exp(-iP_2X_1)$也是个纠缠算符，

$$\exp(-iP_2X_1)\mid p=\eta_2\rangle_1\otimes\mid x=-\eta_1\rangle_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{i\eta_1\eta_2}{2}\right)\mid\eta\rangle。\tag{2.15}$$

从(2.13)式与(2.15)式可以得出结论，纠缠算符把分别属于两个独立模的互为共轭的态(坐标本征态与另一个模的动量本征态)相纠缠而得到$|\eta\rangle$态。

2.4 光分束器作为生成双模纠缠态的基本器件

产生双模纠缠态的最简单光学元件是一个光分束器，这里先回顾光分束器的算符变换理论。

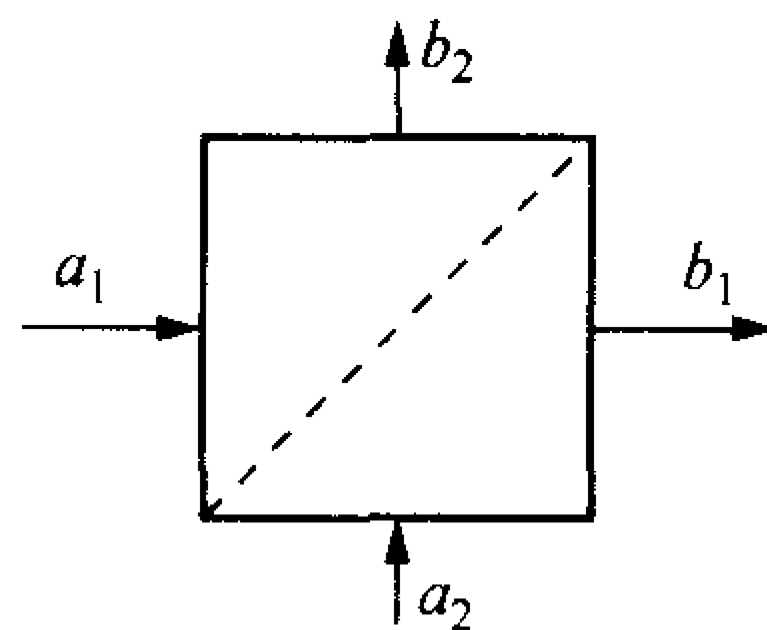


图 2.1

光分束器是最简单又最常用的无源光学器件，但它在量子光学实验中有广泛的应用，甚至可以起到纠缠两束入射光的效果[13]。光分束器把入射光(用玻色算符 a_1,a_2 表示)变换为出射光(用 b_1,b_2 表示)，变换矩阵为[14]

$$\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix},\tag{2.16}$$

每个矩阵元 B_{ij} 为复数，由于$[b_i,b_j^\dagger]=\delta_{ij}$，导致

$$\begin{gathered}|B_{11}|^2+|B_{12}|^2=1,\\ |B_{21}|^2+|B_{22}|^2=1,\\ B_{11}B_{21}^*+B_{12}B_{22}^*=0。\end{gathered}\tag{2.17}$$

方程(2.16)与(2.17)中两个 B 系数并不完全独立，实际上从$B_{ij}=|B_{ij}|\exp(i\theta_{ij})$可看出

$$\begin{gathered}|B_{11}||B_{21}|=|B_{12}||B_{22}|,\\ \theta_{21}-\theta_{22}=\theta_{11}-\theta_{12}\mp\pi。\end{gathered}\tag{2.18}$$

令分束器的穿透系数为τ，则反射系数为$1-\tau$，它们都小于1，故可

令 $\tau=\cos^2\varphi$，于是从(2.17)式可知：

$$\begin{aligned}|B_{11}|^2=|B_{22}|^2=\cos^2\varphi,\\ |B_{12}|^2=|B_{21}|^2=\sin^2\varphi。\end{aligned}\tag{2.19}$$

总述以上结果，把矩阵 B_{ij} 表达为

$$\begin{gathered}e^{i\theta_0}\begin{pmatrix}\cos\varphi e^{i\theta} & \sin\varphi e^{i\psi}\\ -\sin\varphi e^{-i\psi} & \cos\varphi e^{-i\theta}\end{pmatrix}\equiv B\\ \det B=\exp(-i2\theta_0),\end{gathered}\tag{2.20}$$

式中 $\theta\equiv\frac{\theta_{11}-\theta_{22}}{2}$，$\psi\equiv\frac{\theta_{12}-\theta_{21}\mp\pi}{2}$，$\theta_0\equiv\frac{1}{2}(\theta_{11}+\theta_{22})$。

由于我们关心的是两个入射在分束器上光场的相差所引起的干涉效应，整体相角 θ_0 的贡献就无关紧要，所以可令 $\theta_0=0$。当两束入射光进入分束器后不产生相移，则 $\psi=\theta=0$，这时(2.20)式简化为 $B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$。

用理想的 50/50 光分束器可以实现 EPR 纠缠态。让入射光分别是两束单模的理想的压缩光，一个是在 $\hat{X}$ 方向压缩的，另一个是在 $\hat{P}$ 方向压缩的，经过光分束器后的输出光是

$$\begin{aligned}&\exp\left[\frac{\pi}{4}(a_1^\dagger a_2-a_2^\dagger a_1)\right]|p=0\rangle_1\otimes|x=0\rangle_2\\ &=\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\pi}{4}(a_1^\dagger a_2-a_2^\dagger a_1)\right]\\ &\quad\cdot\exp\left(\frac{a_1^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle_1\otimes\exp\left(-\frac{a_2^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle_2\\ &=\exp(-a_1^\dagger a_2^\dagger)|0,0\rangle,\end{aligned}\tag{2.21}$$

此即 EPR 纠缠态，$|\eta=0\rangle$。注意到

$$|\eta\rangle=D(\eta)|\eta=0\rangle,\tag{2.22}$$

式中 $D(\eta)=\exp(\eta a^\dagger-\eta^\dagger a)$称为平移算符。实验上可以借助于把按 η 值(振幅$|\eta|$，相 $e^{i\arg\eta}$)调制的激光场穿过一个部分反射部分穿透的分束器(例如 1%的穿透率和 99%的反射率)，同时将$|\eta=$

$0\rangle$的光场经此分束器反射，把$|\eta=0\rangle$的态变成$|\eta\rangle$态。

2.5 不对称的光分束器产生的纠缠态[15]

在研究中会自然地产生这样的问题：在分束器不是一个50/50的仪器的情况下，当两束分别在$\hat{X}$方向与$\hat{P}$方向极大压缩的光场分别进入分束器的两个输入端时，输出态是什么呢？不对称的光分束器的反射系数与穿透系数不相等，即在(2.16)式中的$B_{12}\neq B_{22}$。在这种情形下，它所能产生的双模连续纠缠态是什么形式的呢？

这里指出它的形式为

$$\begin{aligned}|\eta,\theta\rangle=\exp\Big[&-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a_1^\dagger-\eta^*(a_2^\dagger\sin 2\theta+a_1^\dagger\cos 2\theta)\\&+\frac{1}{2}\eta^{*2}\cos 2\theta+a_1^\dagger a_2^\dagger\sin 2\theta\\&+\frac{1}{2}(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2})\cos 2\theta\Big]|0,0\rangle_{12}。\end{aligned}\tag{2.23}$$

显然，当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，(2.23)式变为$|\eta\rangle$。容易证明$|\eta,\theta\rangle$所满足的本征方程是

$$(a_1-a_2^\dagger\sin 2\theta-a_1^\dagger\cos 2\theta)|\eta,\theta\rangle=(\eta-\eta^*\cos 2\theta)|\eta,\theta\rangle,\tag{2.24}$$

$$(a_2-a_1^\dagger\sin 2\theta+a_2^\dagger\cos 2\theta)|\eta,\theta\rangle=-\eta^*\sin 2\theta|\eta,\theta\rangle,\tag{2.25}$$

$$(a_1\cos 2\theta+a_2\sin 2\theta-a_1^\dagger)|\eta,\theta\rangle=(\eta\cos 2\theta-\eta^*)|\eta,\theta\rangle。\tag{2.26}$$

从(2.25)式与(2.26)式可得到

$$(a_1\sin 2\theta-a_2\cos 2\theta-a_2^\dagger)|\eta,\theta\rangle=\eta\sin 2\theta|\eta,\theta\rangle。\tag{2.27}$$

令$\eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2$，结合(2.24)式与(2.27)式，可看出

$$(X_2-X_1\tan\theta)|\eta,\theta\rangle=-\sqrt{2}\,\eta_1\tan\theta|\eta,\theta\rangle,\tag{2.28}$$

$$(P_1 + P_2\tan\theta)\mid\eta,\theta\rangle = \eta_2\sqrt{2}\mid\eta,\theta\rangle。\tag{2.29}$$

用 IWOP 技术可证$|\eta,\theta\rangle$具有完备性：

$$\begin{aligned}
&\sin 2\theta\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mid\eta,\theta\rangle\langle\eta,\theta\mid\\
&=\sin 2\theta\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}:\exp\Big[-|\eta|^2+\eta(a_1^\dagger\\
&\quad -a_2\sin 2\theta-a_1\cos 2\theta)+\eta^*(a_1-a_2^\dagger\sin 2\theta\\
&\quad -a_1^\dagger\cos 2\theta)+\frac{1}{2}(\eta^2+\eta^{*2})\cos 2\theta\\
&\quad +(a_1^\dagger a_2^\dagger+a_1a_2)\sin 2\theta+\frac{1}{2}(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}\\
&\quad +a_1^2-a_2^2)\cos 2\theta-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2\Big]:\\
&=:\exp\Big\{\frac{1}{\sin^2 2\theta}\Big[(a_1^\dagger-a_2\sin 2\theta-a_1\cos 2\theta)\\
&\quad\cdot(a_1-a_2^\dagger\sin 2\theta-a_1^\dagger\cos 2\theta)+\frac{1}{2}\cos 2\theta(a_1^\dagger\\
&\quad -a_2\sin 2\theta-a_1\cos 2\theta)^2+\frac{1}{2}\cos 2\theta(a_1\\
&\quad -a_2^\dagger\sin 2\theta-a_1^\dagger\cos 2\theta)^2\Big]\\
&\quad +(a_1^\dagger a_2^\dagger+a_1a_2)\sin 2\theta+\frac{1}{2}(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}\\
&\quad +a_1^2-a_2^2)\cos 2\theta-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2\Big\}:\\
&=:\mathrm{e}^0:=1。
\end{aligned}\tag{2.30}$$

以上关系又能导致如下的正交性：

$$\langle\eta',\theta\mid\eta,\theta\rangle=\frac{\pi\delta(\eta-\eta')\delta(\eta^*-\eta'^*)}{\sin 2\theta}。\tag{2.31}$$

$|\eta,\theta\rangle$态的 Schmidt 分解在坐标表象中是

$$\sqrt{2}\cos\theta\mid\eta=\frac{\eta_1+\mathrm{i}\eta_2}{\sqrt{2}},\theta\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x+\frac{\eta_1}{2}\rangle_1$$

$$\otimes\left|\left(x-\frac{\eta_1}{2}\right)\tan\theta\right\rangle_2\exp(\mathrm{i}x\eta_2)。\tag{2.32}$$

在动量表象中是

$$\sqrt{2}\sin\theta'\left|\eta=\frac{\eta_1+\mathrm{i}\eta_2}{\sqrt{2}},\theta\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\left|\left(p+\frac{\eta_2}{2}\right)\right\rangle_1$$

$$\otimes\left|\frac{-p+\dfrac{\eta_2}{2}}{\tan\theta}\right\rangle_2\exp(-\mathrm{i}p\eta_1)。\tag{2.33}$$

当将在不同方向上被极大压缩的光，分别用$|p=0\rangle_1$与$|x=0\rangle_2$代表，入射到不对称光分束器的两臂时，所产生的出射光是

$$\exp[2\theta(a_2^\dagger a_1-a_1^\dagger a_2)]\,|p=0\rangle_1\otimes|x=0\rangle_2$$

$$=\exp\left[a_1^\dagger a_2^\dagger\sin2\theta+\frac{1}{2}(a_1^{\dagger2}-a_2^{\dagger2})\cos2\theta\right]|0,0\rangle,\tag{2.34}$$

再用平移算符作用之，得到

$$D_1(\eta)\exp\left[a_2^\dagger a_1^\dagger\sin2\theta+\frac{1}{2}(a_1^{\dagger2}-a_2^{\dagger2})\cos2\theta\right]|0,0\rangle$$

$$=\exp\left[-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a_1^\dagger-\eta^*(a_2^\dagger\sin2\theta+a_1^\dagger\cos2\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\eta^{*2}\cos2\theta+a_1^\dagger a_2^\dagger\sin2\theta+\frac{1}{2}(a_1^{\dagger2}-a_2^{\dagger2})\cos2\theta\right]|0,0\rangle$$

$$=|\eta,\theta\rangle。\tag{2.35}$$

所以用不对称的光分束器可以实现理想的$|\eta,\theta\rangle$态，它可以组成一个正交、完备的表象。

2.6　双模压缩算符与 EPR 纠缠态$|\eta\rangle$的关系[16]

对于双模光场，为了描写其所处的态的量子起伏，通常引进一对正则共轭的力学量：

$$Y_1=\frac{a_1+a_1^\dagger+a_2+a_2^\dagger}{2\sqrt{2}}=\frac{X_1+X_2}{2},\tag{2.36}$$

$$Y_2 = \frac{a_1 - a_1^\dagger + a_2 - a_2^\dagger}{2\sqrt{2}\mathrm{i}} = \frac{P_1 + P_2}{2}。\tag{2.37}$$

这一对算符在量子光学中称为正交相算符(quadratures)。显然

$$[Y_1, Y_2] = \frac{\mathrm{i}}{2}。\tag{2.38}$$

对照 $Y_2 = \frac{P_1 + P_2}{2}$ 与(2.9)式，就会自然联想到也许用 $|\eta\rangle$ 态为基来研究双模光场的正交相算符的性质及其双模压缩光场态的起伏是最为方便的。事实上，注意到 $|\eta\rangle$ 是 Y_2 的本征态，压缩算符 Y_2 就意味着压缩了 $|\eta\rangle$ 态，所以用 IWOP 技术尝试计算(令 $\mu = \mathrm{e}^\lambda$)：

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mu\pi} \left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta| = \frac{1}{\mu}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} : \exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)\right. \\ &\quad + \eta\left(\frac{a_1^\dagger}{\mu} - a_2\right) - \eta^*\left(\frac{a_2^\dagger}{\mu} - a_1^\dagger\right) + a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2 \\ &\quad \left. - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right] : \\ &= \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger \tanh\lambda)\exp[(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)\ln\operatorname{sech}\lambda] \\ &\quad \cdot \exp(-a_1 a_2 \tanh\lambda)。 \end{aligned}\tag{2.39}$$

不难证明，它又等于

$$S_2 = \exp[\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)]。\tag{2.40}$$

可见 S_2 确实起了压缩纠缠态 $|\eta\rangle$ 的作用：

$$S_2 \,|\,\eta\rangle = \frac{1}{\mu}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle。\tag{2.41}$$

所以称(2.39)式是双模压缩算符的自然表示，它明显地揭示了经典 c 数 $\eta \to \frac{\eta}{\mu}$ 的量子映射就是双模压缩算符，这与以下的物理实际相对应，即当一个光子入射到非线性介质中，产生一种参量下的转换过程，此光子自发转化为两个光子，它们组成一个纠缠态。

现在把单模压缩算符的自然表示

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}} \left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x| = \exp\left[\frac{\lambda}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})\right],\ \mu = \mathrm{e}^\lambda \tag{2.42}$$

与(2.39)式相并列，就可以悟出狄拉克表象理论所蕴涵的美感，即有了 IWOP 技术来发展狄拉克的符号法，[17]、[18]、[19]不但使得表象有更广泛、更深入的应用，而且揭示了更深层次的量子物理表现形式的简洁美与和谐美。(2.39)式与(2.42)式的表述都很简洁。一般来说，公式或定律的表述越简洁，应用就越广泛，内涵就越深刻。(2.42)式与(2.39)式的表述形式又很相似，一个是$|x\rangle\rightarrow|\frac{x}{\mu}\rangle$，而另一个是$|\eta\rangle\rightarrow|\frac{\eta}{\mu}\rangle$，它们分别对应了单模压缩和双模压缩，所以反映了量子规律的和谐。狄拉克曾说过："一条物理定律必须具有数学美感"。因为他认为："从本质上来说，自然规律是简洁的。"在 1977 年，他又写道："在我相知的物理学家中，我认为薛定谔是与我风格最接近的一位，我发现自己与薛定谔最为一致，其原因是他与我都热烈地欣赏数学美。"

"上帝是一位非常高水平的数学家，他用非常先进的数学创造了宇宙"，狄拉克如是说。

上述纠缠态表象堪称为简洁与和谐相结合的一个表象，自 1935 年爱因斯坦等三人提出量子纠缠的思想，到 1994 年纠缠态表象的正式建立，约经历了 60 年，这一事实也使人想起狄拉克的另一段话："……一旦有了发现，它往往显得那么明显，以致人们奇怪为什么以前会没有人想到它。"自 1994 年后，纠缠态表象已得到了系统的发展[10]、[20](纠缠态表象的数学构建可见于笔者 1987 年的一文[10]，但在那里没有说明它就是纠缠态)。作为双模压缩算符的纠缠态表示的一个重要应用，以下计算双模压缩数态 $S|m,n\rangle$，这里$|m,n\rangle$是双模粒子态。为此，引入一个称为双模厄米特多项式的特殊函数 $\mathrm{H}_{m,n}$的母函数分式：[21]、[22]

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(\eta,\eta^*)=\exp(-tt'+t\eta+t'\eta^*),\quad(2.43)$$

根据$|\eta\rangle$的指数形式，有展开

$$|\eta\rangle=\sum_{m,n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(\eta,\eta^{*})\frac{a_{1}^{\dagger m}(-a_{2}^{\dagger})^{n}}{m!n!}|0,0\rangle$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(\eta,\eta^{*})\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{m!n!}}|m,n\rangle,\quad(2.44)$$

$\mathrm{H}_{m,n}(\eta,\eta^{*})$的定义是

$$\mathrm{H}_{m,n}(\eta,\eta^{*})=\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!}(-1)^{l}\eta^{m-l}\eta^{*n-l}$$

$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^{m}\partial t'^{n}}\exp(-tt'+t\eta+t'\eta^{*})\Big|_{t,t'=0}$$

从(2.44)式导出

$$\langle\eta|m,n\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^{2}\right)\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{m!n!}}\mathrm{H}_{n,m}(\eta,\eta^{*})。(2.45)$$

关于这点，在第三章中还要深入研究。用以上这些关系，就有

$$S|m,n\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^{2}\eta}{\mu\pi}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^{2}\right)\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{m!n!}}\mathrm{H}_{n,m}(\eta,\eta^{*})$$

$$=\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^{n}\partial t'^{m}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\eta}{\mu\pi}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^{2}\right)\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{m!n!}}$$

$$\cdot\exp(-tt'+t\eta+t'\eta^{*})\Big|_{t,t'=0}$$

$$=\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{m!n!}}\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^{n}\partial t'^{m}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\eta}{\mu\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}|\eta|^{2}\left(\frac{1}{\mu^{2}}+1\right)\right.$$

$$\left.+\eta\left(t+\frac{a_{1}^{\dagger}}{\mu}\right)+\eta^{*}\left(t'-\frac{a_{2}^{\dagger}}{\mu}\right)-tt'+a_{1}^{\dagger}a_{2}^{\dagger}\right]|0,0\rangle\Big|_{t,t'=0}$$

$$=(-1)^{n}\mathrm{sech}\lambda\frac{1}{\sqrt{m!n!}}\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^{n}\partial t'^{m}}\exp[tt'\tanh\lambda$$

$$+\mathrm{sech}\lambda(t'a_{1}^{\dagger}-ta_{2}^{\dagger})+\tanh\lambda a_{2}^{\dagger}a_{1}^{\dagger}]|0,0\rangle\Big|_{t,t'=0}$$

$$=\mathrm{sech}\lambda\sqrt{m!n!}\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{1}{l!(n-l)!(m-l)!}(-\tanh\lambda)^{l}$$

$$\cdot(\mathrm{sech}\lambda)^{n+m-2l}a_{2}^{\dagger n-l}a_{1}^{\dagger m-l}\exp(\tanh\lambda a_{2}^{\dagger}a_{1}^{\dagger})|0,0\rangle$$

$$=\sqrt{m!n!}\exp(\tanh\lambda a_2^\dagger a_1^\dagger)\sum_{j=\max(0,n-m)}^{n}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{j!(n-j)!(m-n+j)!}$$
$$\cdot(\operatorname{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}a_1^{\dagger\, m-n+j}a_2^{\dagger\, j}\mid 0,0\rangle。\tag{2.46}$$

而且

$$\langle m',n'|S|m,n\rangle=\langle m',n'|\sqrt{m!n!}\sum_{j=\max(0,n-m)}^{n}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{j!(n-j)!(m-n+j)!(n'-j)!}$$
$$\cdot(\operatorname{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}a_2^{\dagger\, j}a_1^{\dagger\, m-n+j}(\tanh\lambda a_2^\dagger a_1^\dagger)^{n'-j}\mid 0,0\rangle$$
$$=\delta_{m'-n',m-n}(-1)^n\sqrt{m!m'!n!n'!}(\tanh\lambda)^{n'}(\operatorname{sech}\lambda)^{m+1}$$
$$\cdot\sum_{j=\max(0,n-m)}^{\min(n,n')}\frac{(-1)^j(\sinh\lambda)^{n-2j}}{j!(n'-j)!(n-j)!(m-n+j)!}。\tag{2.47}$$

2.7 单边双模压缩算符与纠缠态变换[23]

从纠缠态表象的变换还可以发现若干新的双模压缩算符。由$|\eta\rangle$的 Schmidt 分解式(2.11)知

$$(X_1+X_2)\mid\eta\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q(2q-\sqrt{2}\eta_1)\mid q\rangle_1\otimes\mid q-\sqrt{2}\eta_1\rangle_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_2(\sqrt{2}q-\eta_1)}$$
$$=-\mathrm{i}\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\eta_2}\mid\eta\rangle,\tag{2.48}$$

式中　$\eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2$。另一方面，由(2.10)式又得

$$(P_1-P_2)\mid\eta\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p(2p+\sqrt{2}\eta_2)\mid p+\sqrt{2}\eta_2\rangle\otimes\mid -p\rangle_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta_1(\sqrt{2}p+\eta_2)}$$
$$=\mathrm{i}\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\eta_1}\mid\eta\rangle。\tag{2.49}$$

可见在$\langle\eta|$表象下，

$$(X_1+X_2)\to\mathrm{i}\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\eta_2},\ (P_1-P_2)\to-\mathrm{i}\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\eta_1}。\tag{2.50}$$

由此看出：

$$\langle\eta|\frac{1}{2}(P_1+P_2)(X_1+X_2)=\mathrm{i}\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_2}\langle\eta|。\tag{2.51}$$

令 $\eta_2=\mathrm{e}^y$，并记$|\eta\rangle=|\eta_1,\eta_2\rangle$，则由(2.51)式导出

$$\begin{aligned}\langle\eta|\frac{1}{2}(P_1+P_2)(X_1+X_2)&=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^y\frac{\partial y}{\partial\eta_2}\frac{\partial}{\partial y}\langle\eta_1,\eta_2=\mathrm{e}^y|\\&=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\langle\eta_1,\eta_2=\mathrm{e}^y|。\end{aligned}\tag{2.52}$$

注意到 $\exp\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)f(y)=f(y-\lambda)$，可知

$$\langle\eta|\exp\left[\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}(P_1+P_2)(X_1+X_2)\right]=\exp\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)\langle\eta_1,\eta_2=\mathrm{e}^y|$$
$$=\langle\eta_1,\mathrm{e}^{y-\lambda}|=\langle\eta_1,\mathrm{e}^{-\lambda}\eta_2|。\tag{2.53}$$

这表明幺正算符 $S\equiv\exp\left[\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}(P_1+P_2)(X_1+X_2)-\frac{\lambda}{2}\right]$，把$|\eta\rangle$压缩为

$$\langle\eta|S=\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\langle\eta_1,\mathrm{e}^{-\lambda}\eta_2|,\tag{2.54}$$

故称之为单边双模压缩算符。或写为

$$S'=\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta_1,\mathrm{e}^{-\lambda}\eta_2|。\tag{2.55}$$

用 IWOP 技术积分之，得

$$\begin{aligned}S'=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda:\exp\Big\{&-\frac{\tanh\lambda}{4}\left[(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2-(a_1+a_2)^2\right]\\&-\frac{1}{2}(a_1^\dagger+a_2^\dagger)(a_1+a_2)(\operatorname{sech}\lambda-1)\Big\}:。\end{aligned}\tag{2.56}$$

用算符恒等式

$$\exp[f(a_1^\dagger+a_2^\dagger)(a_1+a_2)]=:\exp[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2f}-1)(a_1^\dagger+a_2^\dagger)(a_1+a_2)]:,\tag{2.57}$$

S'可写为

$$S'=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda\exp\left[-\frac{\tanh\lambda}{4}(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2\right]$$

$$\cdot\exp\left[\frac{1}{2}(a_1^\dagger+a_2^\dagger)(a_1+a_2)\ln\operatorname{sech}\lambda\right]$$

$$\cdot\exp\left[\frac{\tanh\lambda}{4}(a_1+a_2)^2\right], \tag{2.58}$$

这是一个新压缩算符,相应的真空态是

$$S'\mid 0,0\rangle=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda\exp\left[-\frac{\tanh\lambda}{4}(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2\right]\mid 0,0\rangle, \tag{2.59}$$

式中包含 $a_1^{\dagger 2}$,$a_2^{\dagger 2}$ 及 $a_1^\dagger a_2^\dagger$ 三类算符。上式也可以表示为

$$S'\mid 0,0\rangle=\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mid\eta\rangle$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\eta_1^2+\eta_2^2\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}\right)。 \tag{2.60}$$

用类似的讨论可证

$$\langle\eta\mid\frac{(X_1-X_2)(P_1-P_2)}{2}=-\mathrm{i}\eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}\langle\eta\mid。 \tag{2.61}$$

令 $\eta_1=\mathrm{e}^x$,则

$$\langle\eta\mid\frac{(X_1-X_2)(P_1-P_2)}{2}=-\mathrm{i}\mathrm{e}^x\frac{\partial x}{\partial\eta_1}\frac{\partial}{\partial x}\langle\eta_1=\mathrm{e}^x,\eta_2\mid$$

$$=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle\eta_1=\mathrm{e}^x,\eta_2\mid。 \tag{2.62}$$

由此可见,

$$S''\equiv\exp\left[-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}(X_1-X_2)(P_1-P_2)-\frac{\lambda}{2}\right]$$

$$=\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mid\eta\rangle\langle\mathrm{e}^{-\lambda}\eta_1,\eta_2\mid。 \tag{2.63}$$

用 IWOP 技术积分之,得

$$S''=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda\exp\left[-\frac{\tanh\lambda}{4}(a_1^\dagger-a_2^\dagger)^2\right]$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}(a_1^\dagger-a_2^\dagger)(a_1-a_2)\ln\cosh\lambda\right]$$

$$\cdot\exp\left[\frac{\tanh\lambda}{4}(a_1-a_2)^2\right]。 \tag{2.64}$$

这是另一类单边双模压缩算符。单边双模压缩态也可以用光分束器来实现，这将在下一节中论及。

2.8 产生单边双模压缩态的哈密顿算符

下面分析什么样的动力学哈密顿量能够生成如（2.54）式那样的压缩演化。为此，令(2.55)式中的压缩参量 $\mu=e^{\lambda}$ 为时间的函数 $\mu(t)=e^{\lambda(t)}$，再求相互作用哈密顿量，它能生成连续的时间演化 $|\eta\rangle\rightarrow|\eta_1,e^{\lambda}\eta_2\rangle$。对(2.58)式中的 t 微商，得

$$\mathrm{i}\frac{\partial S'[\mu(t)]}{\partial t}=\mathrm{i}\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}[(a_1+a_2)^2-(a_1^{\dagger}+a_2^{\dagger})^2]S'[\mu(t)]。\tag{2.65}$$

把它与标准的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial S'(\mu(t))}{\partial t}=H(t)S'[\mu(t)]\tag{2.66}$$

相比较，可知在相互作用图像中能产生所需压缩的哈密顿量是

$$\begin{aligned}H(t)&=\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\mathrm{i}}{4}[(a_1+a_2)^2-(a_1^{\dagger}+a_2^{\dagger})^2]\\&=-\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}\frac{1}{2}[(P_1+P_2)(Q_1+Q_2)+\mathrm{i}]。\end{aligned}\tag{2.67}$$

这样的动力学机制可以发生在二次谐波产生或参量下转换过程中。为此，令两束入射光场(E_1 和 E_2)进入一个非线性晶体，其极化强度不但与 E_1+E_2 的线性项有关，而且与(E_1+E_2)的二阶项有关，比例系数分别为 $\chi_e^{(1)}$ 和 $\chi_e^{(2)}$，

$$\mathscr{P}=\chi_e^{(1)}(E_1+E_2)+\chi_e^{(2)}(E_1+E_2)^2+\cdots,\tag{2.68}$$

式中 $E_i(x,t)\sim a_i e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+a_i^{\dagger}e^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}$。那么出射光就是单边双模压缩态。

结合(2.55)式与(2.63)式，可看出利用纠缠态表象可以从经典标度变换导出新的压缩算符，进一步暗示了压缩与纠缠的关系。下一节将在单边双模压缩态的基础上构造相干纠缠态。

2.9 相干-纠缠态[24]

本节将构造一类新态，它既有相干态的性质，又是一种双模纠缠态，而且它在量子光学理论中有一定的用途。这个态矢量在双模 Fock 空间中的表示为

$$|\alpha,x\rangle=\exp\left(-\frac{1}{4}|\alpha|^2-\frac{1}{2}x^2\right)\exp\left[-\frac{1}{4}(a_1^{\dagger}+a_2^{\dagger})^2+\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)a_1^{\dagger}+\left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)a_0^{\dagger}\right]|0,0\rangle。\tag{2.69}$$

分别以湮灭算符作用之，得

$$a_1|\alpha,x\rangle=\left[\frac{1}{2}(\alpha-a_1^{\dagger}-a_2^{\dagger})+x\right]|\alpha,x\rangle,\tag{2.70}$$

$$a_2|\alpha,x\rangle=\left[-\frac{1}{2}(a_2^{\dagger}+a_1^{\dagger}+\alpha)+x\right]|\alpha,x\rangle。\tag{2.71}$$

给出

$$(a_1-a_2)|\alpha,x\rangle=\alpha|\alpha,x\rangle,\tag{2.72}$$

它体现了相干态的特点。另一方面，由

$$(a_1+a_2)|\alpha,x\rangle=(-a_1^{\dagger}-a_2^{\dagger}+2x)|\alpha,x\rangle,\tag{2.73}$$

可知

$$\frac{1}{2}(X_1+X_2)|\alpha,x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}x|\alpha,x\rangle\tag{2.74}$$

又体现了纠缠态的特点，故$|\alpha,x\rangle$是(a_1-a_2)与(X_1+X_2)的共同本征态，$[a_1-a_2,X_1+X_2]=0$。用 IWOP 技术可证$|\alpha,x\rangle$是完备的：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{2\pi}|\alpha,x\rangle\langle\alpha,x|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{2\pi}:\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2-x^2-\frac{1}{4}(a_1^{\dagger}+a_2^{\dagger})^2+\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)a_1^{\dagger}\right.$$

$$\left.+\left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)a_2^{\dagger}-a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2-\frac{1}{4}(a_1+a_2)^2+\left(\frac{1}{2}\alpha^*+x\right)a_1\right.$$

$$+\left(x-\frac{1}{2}\alpha^{*}\right)a_{2}\Big]:=1。\tag{2.75}$$

为了考察$|\alpha,x\rangle$的正交性，先写出它与双模相干态的内积：

$$\langle z_{1},z_{2}\mid\alpha,x\rangle=\exp\left(-\frac{1}{4}\mid\alpha\mid^{2}-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}\mid z_{1}\mid^{2}-\frac{1}{2}\mid z_{2}\mid^{2}\right)$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{4}(z_{1}^{*}+z_{2}^{*})^{2}+\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)z_{1}^{*}+\left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)z_{2}^{*}\right],\tag{2.76}$$

然后计算

$$\langle\alpha',x'\mid\alpha,x\rangle=\int\frac{d^{2}z_{1}d^{2}z_{2}}{\pi^{2}}\langle\alpha',x'\mid z_{1},z_{2}\rangle\langle z_{1},z_{2}\mid\alpha,x\rangle$$
$$=D_{1}\int\frac{d^{2}z_{1}d^{2}z_{2}}{\pi^{2}}\exp\left[-\sum_{i=1}^{2}\left(\mid z_{i}\mid^{2}+\frac{1}{4}z_{i}^{2}+\frac{1}{4}z_{i}^{*2}\right)\right.$$
$$+\left(x'+\frac{1}{2}\alpha'^{*}-\frac{1}{2}z_{2}\right)z_{1}+\left(x+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}z_{2}^{*}\right)z_{1}^{*}$$
$$\left.+\left(x'-\frac{1}{2}\alpha'^{*}\right)z_{2}+\left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)z_{2}^{*}\right],\tag{2.77}$$

式中

$$D_{1}=\exp\left[-\frac{1}{4}(\mid\alpha\mid^{2}+\mid\alpha'\mid^{2})-\frac{1}{2}(x^{2}+x'^{2})\right]。\tag{2.78}$$

利用δ函数的极限形式：

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\exp\left(\frac{-x^{2}}{\varepsilon}\right),\tag{2.79}$$

最终得到内积为

$$\langle\alpha',x'\mid\alpha,x\rangle=\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{1}{4}(\mid\alpha\mid^{2}+\mid\alpha'\mid^{2})+\frac{1}{2}\alpha\alpha'^{*}\right]\delta(x-x')。\tag{2.80}$$

可以用光分束器来产生$|\alpha,x\rangle$态。让分束器的两个输入端分别输入理想单模压缩态$\exp\left[-\frac{1}{2}a_{1}^{\dagger 2}\right]|0\rangle_{1}$和真空态$|0\rangle_{2}$，那么分束器的功能可由算符

$$\mathscr{B} \equiv \exp\left[-\frac{\theta}{2}(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)\right] \tag{2.81}$$

表示，它作用于输入态，得到

$$\mathscr{B}\exp\left(-\frac{1}{2}a_1^{\dagger 2}\right)|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \exp[-(a_2^\dagger\cos\theta + a_1^\dagger\sin\theta)^2]|0,0\rangle。 \tag{2.82}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$，上式为 $\exp\left[-\frac{1}{4}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)^2\right]|0,0\rangle$，即上节所述的单边压缩态。再作用两个平移算符在它上面，就得到 $|\alpha,x\rangle$，即

$$D_1\left[\frac{1}{2}(x+\alpha)\right]D_2\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)\right]\exp\left[-\frac{1}{4}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)^2\right]|0,0\rangle = |\alpha,x\rangle。 \tag{2.83}$$

物理上，这两个平移算符的作用相当于两束不同模的激光的调制。

由 $|\alpha,x\rangle$ 的相干态性质，它也可以被用于建立密度矩阵 $\rho(a_1^\dagger - a_2^\dagger, a_1 - a_2)$ 的 P 表示，参看文献[24]。

2.10 作为 $X_1^2+X_2^2$ 与 $X_1P_2-X_2P_1$ 共同本征态的两体纠缠态[25]

以上讨论了两体纠缠态是 X_1-X_2 与 P_1+P_2 的共同本征态。也可建立另一种有关坐标、动量算符的纠缠态，即鉴于

$$[X_1^2+X_2^2, L_z] = 0, \quad L_z = X_1P_2 - X_2P_1, \tag{2.84}$$

它们是 X_1, X_2, P_1, P_2 这四个力学量的另一种组合，反映另一种纠缠性质。

以下求 $X_1^2+X_2^2$ 与 L_z 的共同本征态 $|r,m\rangle$，它满足

$$(X_1^2+X_2^2)|r,m\rangle = r^2|r,m\rangle, \ L_z|r,m\rangle = m|r,m\rangle。 \tag{2.85}$$

用狄拉克的二维坐标表象 $|x_1,x_2\rangle$，$x_1=\rho\cos\theta$，$x_2=\rho\sin\theta$，$\rho^2=x_1^2+x_2^2$，

$$|x_1,x_2\rangle=\pi^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2}+\sqrt{2}\rho(a^\dagger\cos\theta+b^\dagger\sin\theta)-\frac{a^{\dagger 2}+b^{\dagger 2}}{2}\right]|0,0\rangle, \tag{2.86}$$

则

$$L_z=-\mathrm{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathrm{i}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}。 \tag{2.87}$$

由

$$\begin{aligned}\langle x_1,x_2|(X_1^2+X_2^2)|r,m\rangle&=\rho^2\langle x_1,x_2|r,m\rangle\\&=r^2\langle x_1,x_2|r,m\rangle,\end{aligned} \tag{2.88}$$

可知

$$\begin{aligned}\langle x_1,x_2|r,m\rangle&=\delta(\rho^2-r^2)\\&=\frac{1}{2r}[\delta(\rho-r)+\delta(\rho+r)],\end{aligned} \tag{2.89}$$

式中第二个 δ 函数无贡献，因为 $\rho\neq -r$。另一方面，从(2.87)式得

$$\begin{aligned}\langle x_1,x_2|(P_2X_1-X_2P_1)|r,m\rangle&=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle x_1,x_2|r,m\rangle\\&=m\langle x_1,x_2|r,m\rangle。\end{aligned} \tag{2.90}$$

可见 $\langle x_1,x_2|r,m\rangle\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$。由于波函数的唯一性条件 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}|_{\theta=0}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}|_{\theta=2\pi}$，所以 m 的取值为 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$。结合(2.89)式与(2.90)式，得

$$\langle x_1,x_2|r,m\rangle=\frac{1}{2r}\delta(\rho-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \tag{2.91}$$

由此导出

$$\begin{aligned}|r,m\rangle&=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2|x_1,x_2\rangle\langle x_1,x_2|r,m\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\frac{1}{2r}\delta(\rho-r)\exp\left[-\frac{\rho^2}{2}+\sqrt{2}\rho(a^\dagger\cos\theta+b^\dagger\sin\theta)-\frac{a^{\dagger 2}+b^{\dagger 2}}{2}\right]|0,0\rangle\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}+b^{\dagger 2}}{2}\right) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$$

$$\cdot \exp\left[\sqrt{2} r (a^{\dagger} \cos\theta + b^{\dagger} \sin\theta)\right] | 0,0 \rangle。 \quad (2.92)$$

令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, A \equiv \frac{a+\mathrm{i}b}{\sqrt{2}}, B \equiv \frac{a-\mathrm{i}b}{\sqrt{2}}, [A, A^{\dagger}] = [B, B^{\dagger}] = 1, [A, B^{\dagger}] = 0$，对(2.92)式积分，得 $|r,m\rangle$ 的显式

$$| r,m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2} - A^{\dagger} B^{\dagger}\right) \oint z^{m-1} \exp\left(rA^{\dagger} z + \frac{rB^{\dagger}}{z}\right) \mathrm{d}z \, | 0,0 \rangle$$

$$= 2\sqrt{\pi} r^m \exp\left(-\frac{r^2}{2} - A^{\dagger} B^{\dagger}\right) \sum_{k=\max(0,-m)}^{\infty} \frac{r^{2k} A^{\dagger k} B^{\dagger k+m}}{k!(k+m)!} | 0,0 \rangle, \quad (2.93)$$

它是双模 Fock 空间中的纠缠态，其中 $\exp(-A^{\dagger} B^{\dagger})$ 起着纠缠的作用。从以下计算

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r \mathrm{d}r \langle x_1', x_2' | r,m \rangle \langle r,m | x_1, x_2 \rangle$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{4r} \exp[\mathrm{i}m(\theta' - \theta)] \delta(\rho' - r) \delta(\rho - r)$$

$$= \pi \frac{1}{2\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\theta - \theta')$$

$$= \frac{\pi}{2} \delta(x_1' - x_1) \delta(x_2' - x_2)$$

$$= \frac{\pi}{2} \langle x_1', x_2' | x_1, x_2 \rangle, \quad (2.94)$$

可见 $|r,m\rangle$ 是完备的：

$$\frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} r \mathrm{d}r \, | r,m \rangle \langle r,m | = 1。 \quad (2.95)$$

另一方面，从

$$\langle r', m' | r,m \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \langle r', m' | x_1, x_2 \rangle \langle x_1, x_2 | r,m \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \exp[\mathrm{i}(m'-m)^{\theta}] \frac{1}{4r}\delta(\rho-r)\delta(\rho-r')$$

$$= \frac{\pi}{2r}\delta(r-r')\delta_{m,m'}, \tag{2.96}$$

可知$|r,m\rangle$是正交的。又由

$$\begin{aligned}[][X_1+\mathrm{i}X_2, L_z] &= -(X_1+\mathrm{i}X_2), \\ [X_1-\mathrm{i}X_2, L_z] &= -(X_1-\mathrm{i}X_2),\end{aligned} \tag{2.97}$$

可得

$$L_z(X_1+\mathrm{i}X_2)|r,m\rangle = (m+1)(X_1+\mathrm{i}X_2)|r,m\rangle。 \tag{2.98}$$

所以$(X_1+\mathrm{i}X_2)|r,m\rangle$是$L_z$的本征值为$m+1$的本征矢，确实，从(2.91)式可见

$$\begin{aligned}(X_1+\mathrm{i}X_2)|r,m\rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 |x_1,x_2\rangle \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta}\frac{1}{2r}\delta(\rho-r) \\ &= r\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 |x_1,x_2\rangle\langle x_1,x_2|r,m+1\rangle \\ &= r|r,m+1\rangle。\end{aligned} \tag{2.99}$$

类似地有

$$(X_1-\mathrm{i}X_2)|r,m\rangle = r|r,m-1\rangle。 \tag{2.100}$$

所以$X_1 \pm \mathrm{i}X_2$是$|r,m\rangle$表象中的上升与下降算符。分析(2.93)式，可以称$|r,m\rangle$为半径-角动量纠缠态，即尽管$X_i^2(i=1,2)$与角动量L_z不对易，但是$X_1^2+X_2^2$与之对易，它们可以同时精确地被测量。具体的物理例子参见文献[25]。

2.11　带参量的两体纠缠态表象[26]

对于不同质量的两个粒子，其质心坐标$X_C=\mu_1 X_1+\mu_2 X_2$和两粒子间的质量权重相对动量$P_r=\mu_2 P_1-\mu_1 P_2$是对易的，它们有共同的本征态，称之为带参量的两体纠缠态，这里$\mu_i=\frac{m_i}{M}$，$M=m_1+m_2$，$\mu_1+\mu_2=1$。所建立的一般态矢量是

$$|\zeta\rangle_g = \exp\Big[-\frac{1}{2}|\zeta|^2 + (f\zeta + g\zeta^*)a_1^\dagger + (f\zeta^* - g\zeta)a_2^\dagger$$
$$- fg(a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2}) - (f^2 - g^2)a_1^\dagger a_2^\dagger\Big]|0,0\rangle,$$
$$\zeta = \zeta_1 + \mathrm{i}\zeta_2, \tag{2.101}$$

式中实参量 f 与 g 是相关的，$f^2+g^2=1$，这保证了 $|\zeta\rangle_g$ 是完备的。由 IWOP 技术，可证

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle_{gg}\langle\zeta| = {}&:\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\exp[-|\zeta|^2 + (f\zeta + g\zeta^*)a_1^\dagger \\ &+ (f\zeta^* - g\zeta)a_2^\dagger - fg(a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2}) \\ &- (f^2 - g^2)a_1^\dagger a_2^\dagger + (f\zeta^* + g\zeta)a_1 \\ &+ (f\zeta - g\zeta^*)a_2 - fg(a_1^2 - a_2^2) \\ &- (f^2 - g^2)a_1a_2 - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2]: \\ = {}&:\exp[(fa_1^\dagger + fa_2 + ga - ga_2^\dagger) \\ &\cdot(fa_2^\dagger + ga_1^\dagger + fa_1 - ga_2) \\ &- fg(a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2}) - (f^2 - g^2)a_1^\dagger a_2^\dagger \\ &- fg(a_1^2 - a_2^2) - (f^2 - g^2)a_1a_2 \\ &- a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2]: \\ = {}&:\exp[(f^2 + g^2 - 1)(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)]: \\ = {}&1。\end{aligned} \tag{2.102}$$

另一方面，也不难证明正交性：

$$_g\langle\zeta'|\zeta\rangle_g = \pi\delta(\zeta_1' - \zeta_1)\delta(\zeta_2' - \zeta_2)。 \tag{2.103}$$

$|\zeta\rangle_g$ 所满足的本征方程是

$$\begin{aligned}&[f(a_1 + a_2^\dagger) + g(a_1^\dagger - a_2)]|\zeta\rangle_g = \zeta|\zeta\rangle_g, \\ &[f(a_1^\dagger + a_2) + g(a_1 - a_2^\dagger)]|\zeta\rangle_g = \zeta^*|\zeta\rangle_g。\end{aligned} \tag{2.104}$$

引入

$$\begin{pmatrix}A_1^\dagger \\ A_2^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f & -g \\ g & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^\dagger \\ a_2^\dagger\end{pmatrix}, \tag{2.105}$$

可把 $|\zeta\rangle_g$ 纳入

$$|\zeta\rangle_g = \exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2} + \zeta A_1^\dagger + \zeta^* A_2^\dagger - A_1^\dagger A_2^\dagger\right)|0,0\rangle, \tag{2.106}$$

而本征方程(2.104)则改写为

$$\begin{aligned}(A_2^\dagger + A_1)|\zeta\rangle_g &= \zeta|\zeta\rangle_g,\\ (A_2 + A_1^\dagger)|\zeta\rangle_g &= \zeta^*|\zeta\rangle_g。\end{aligned} \tag{2.107}$$

以下分析 f 与 g 取什么值时，$|\zeta\rangle_g$ 恰是两粒子质心坐标和质量权重相对动量的共同本征态。注意到坐标、动量算符与谐振子产生、湮灭算符的关系是

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m_i\omega_i}{\hbar}}X_i + \frac{\mathrm{i}P_i}{\sqrt{m_i\omega_i\hbar}}\right),\ i=1,2。 \tag{2.108}$$

为方便计，令 $\omega_i=1,\hbar=1,M=m_1+m_2=2,m_i=2\mu_i$，则由(2.108)式可知

$$X_i = \frac{a_i + a_i^\dagger}{2\sqrt{\mu_i}},\ P_i = -\mathrm{i}\sqrt{\mu_i}(a_i - a_i^\dagger)。 \tag{2.109}$$

认定 f 与 g 为

$$f = \sqrt{\frac{\mu_1}{2}} + \sqrt{\frac{\mu_2}{2}},\quad g = \sqrt{\frac{\mu_1}{2}} - \sqrt{\frac{\mu_2}{2}}, \tag{2.110}$$

用(2.105)式，则质心坐标为

$$\begin{aligned}2X_C &= \sqrt{\mu_1}(a_1 + a_1^\dagger) + \sqrt{\mu_2}(a_2 + a_2^\dagger)\\ &= \frac{f+g}{\sqrt{2}}(a_1 + a_1^\dagger) + \frac{f-g}{\sqrt{2}}(a_2 + a_2^\dagger)\\ &= \frac{A_1 + A_1^\dagger}{\sqrt{2}} + \frac{A_2 + A_2^\dagger}{\sqrt{2}},\end{aligned} \tag{2.111}$$

相对动量为

$$\begin{aligned}2P_r &= 2\mu_1\mu_2\left(\frac{a_1 - a_1^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{\mu_1}} - \frac{a_2 - a_2^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{\mu_2}}\right)\\ &= \frac{2\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\mathrm{i}}\left[\frac{f-g}{\sqrt{2}}(a_1 - a_1^\dagger) - \frac{f+g}{\sqrt{2}}(a_2 - a_2^\dagger)\right]\end{aligned}$$

$$=(f^2-g^2)\left[\frac{A_1-A_1^\dagger}{\sqrt{2}\mathrm{i}}-\frac{A_2-A_2^\dagger}{\sqrt{2}\mathrm{i}}\right]。\tag{2.112}$$

由(2.107)式以及 $\zeta=\zeta_1+\mathrm{i}\zeta_2$ 可见

$$\begin{aligned}X_C\mid\zeta\rangle_g&=\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_1\mid\zeta\rangle_g,\\P_r\mid\zeta\rangle_g&=\frac{1}{\sqrt{2}}(f^2-g^2)\zeta_2\mid\zeta\rangle_g,\end{aligned}\tag{2.113}$$

所以当取(2.110)式时，$|\zeta\rangle_g$ 为 X_C 与 P_r 的共同本征态。由 $|\zeta\rangle_g$ 可以想到它的正则共轭态：

$$\begin{aligned}\mid\eta\rangle_g&=\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta A_1^\dagger-\eta^*A_2^\dagger+A_1^\dagger A_2^\dagger\right)\mid 0,0\rangle\\&=\exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2}+(f\eta-g\eta^*)a_1^\dagger-(f\eta^*+g\eta)a_2^\dagger\right.\\&\quad\left.+(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2})fg+a_1^\dagger a_2^\dagger(f^2-g^2)\right]\mid 0,0\rangle,\end{aligned}\tag{2.114}$$

它也具备完备性：

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mid\eta\rangle_{gg}\langle\eta\mid=1。\tag{2.115}$$

按如下的方式引入相对坐标与总动量

$$\begin{aligned}X_r=X_1-X_2&=\frac{a_1+a_1^\dagger}{2\sqrt{\mu_1}}-\frac{a_2+a_2^\dagger}{2\sqrt{\mu_2}}\\&=\frac{1}{f^2-g^2}\left(\frac{A_1+A_1^\dagger}{\sqrt{2}}-\frac{A_2+A_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right),\end{aligned}\tag{2.116}$$

$$P_C=P_1+P_2=\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}[(A_1-A_1^\dagger)+(A_2-A_2^\dagger)],\tag{2.117}$$

则可见 $|\eta\rangle_g$ 满足的本征方程是

$$X_r\mid\eta\rangle_g=\frac{\sqrt{2}\eta_1}{f^2-g^2}\mid\eta\rangle_g,\ P_C\mid\eta\rangle_g=\sqrt{2}\eta_2\mid\eta\rangle_g。\tag{2.118}$$

${}_g\langle\eta|$ 与 $|\zeta\rangle_g$ 的内积是

$${}_g\langle\eta\mid\zeta\rangle_g=\frac{1}{2}\exp\left(\frac{\eta^*\zeta-\eta\zeta^*}{2}\right)=\frac{1}{2}\exp[\mathrm{i}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)],$$

$$\eta = \eta_1 + \mathrm{i}\eta_2。\tag{2.119}$$

注意到(X_r, P_C)与(X_C, P_r)是相互共轭的一对力学量，所以其本征态$|\eta\rangle_g$与$|\zeta\rangle_g$也是相互共轭的。

作为$|\zeta\rangle_g$的应用，以下求类库仑位势$\frac{1}{X_r}$在${}_g\langle\zeta|$中的表示。用(2.118)式得

$$\begin{aligned}
{}_g\langle\zeta|\frac{1}{X_r} &= \int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta'}{\pi}\,{}_g\langle\zeta|\frac{1}{X_r}|\eta\rangle_{gg}\langle\eta|\zeta'\rangle_{gg}\langle\zeta'| \\
&= \iiiint\frac{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\mathrm{d}\zeta'_1\mathrm{d}\zeta'_2}{\pi^2}\frac{f^2-g^2}{4\sqrt{2}\eta_1}\,{}_g\langle\zeta'| \\
&\quad\cdot\exp\{\mathrm{i}[\eta_1(\zeta'_2-\zeta_2)-\eta_2(\zeta'_1-\zeta_1)]\} \\
&= (f^2-g^2)\iiint\frac{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\zeta'_1\mathrm{d}\zeta'_2}{2\sqrt{2}\pi\eta_1}\,{}_g\langle\zeta'|\delta(\zeta'_1-\zeta_1) \\
&\quad\cdot\exp[\mathrm{i}\eta_1(\zeta'_2-\zeta_2)] \\
&= (f^2-g^2)\langle 0,0|\iint\frac{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\zeta'_2}{2\sqrt{2}\pi\eta_1}\exp\Big[-\frac{\zeta_1^2+\zeta'^2_2}{2} \\
&\quad+\zeta_1(A+B)+\mathrm{i}\zeta'_2(B-A)+\mathrm{i}\eta_1(\zeta'_2-\zeta_2)-AB\Big]。
\end{aligned}\tag{2.120}$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\eta_1}\exp[\mathrm{i}\eta_1(\zeta'_2-\zeta_2)] = 2\pi\mathrm{i}\times\begin{cases}1, & \zeta'_2>\zeta_2, \\ 0, & \zeta_2>\zeta'_2,\end{cases}\tag{2.121}$$

得到

$$ {}_g\langle\zeta|\frac{1}{X_r} = \frac{\mathrm{i}(f^2-g^2)}{\sqrt{2}}\int_{\zeta_2}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'_2\,{}_g\langle\zeta_1,\zeta'_2|。\tag{2.122}$$

现考虑一维氢原子，其哈密顿量是

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+\frac{k}{X_1-X_2}。\tag{2.123}$$

用质心坐标和质量权重相对动量，可将(2.123)式改写为

$$H=\frac{P_C^2}{2M}+\frac{P_r^2}{2\mu}+\frac{k}{X_r},\quad \mu=\frac{m_1m_2}{M},\tag{2.124}$$

式中$\frac{P_C^2}{2M}$项代表质心自由运动，故无需多加关心。在${}_g\langle\zeta|\equiv{}_g\langle\zeta_1,\zeta_2|$表象中，用(2.113)式和(2.122)式可知能量本征方程形为

$$\begin{aligned}&{}_g\langle\zeta_1=0,\zeta_2|\left(\frac{P_r^2}{2\mu}+\frac{k}{X_r}\right)|\psi\rangle\\&=\frac{(f^2-g^2)^2}{4\mu}\zeta_2^2\psi(0,\zeta_2)+\frac{\mathrm{i}k(f^2-g^2)}{\sqrt{2}}\int_{\zeta_2}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'_2\psi(0,\zeta'_2)\\&=E\psi(0,\zeta_2)。\end{aligned}\tag{2.125}$$

仅考虑束缚态情况，$E<0$。令 $s^2=-\frac{4\mu E}{(f^2-g^2)^2}$，则(2.125)式改写为

$$\frac{\psi(0,\zeta_2)}{\int_{\zeta_2}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'_2\psi(0,\zeta'_2)}=-\frac{\sqrt{8}\,\mathrm{i}\mu k}{(f^2-g^2)(\zeta_2^2+s^2)},\tag{2.126}$$

其解是

$$\int_{\zeta_2}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'_2\psi(0,\zeta'_2)=\exp\left[\frac{-\sqrt{8}\,\mathrm{i}\mu k}{s(f^2-g^2)}\arctan\frac{\zeta_2}{s}\right]+C,\tag{2.127}$$

式中 C 是积分常数。设$\frac{\zeta_2}{s}=\theta\pm\pi$，则由波函数的单值性，必须令

$$\frac{\sqrt{8}\mu k}{s(f^2-g^2)}=2n,\tag{2.128}$$

式中 n 为整数，才有

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{-\sqrt{8}\mathrm{i}\mu k}{s(f^2-g^2)}\arctan\frac{\zeta_2}{s}\right]&=\exp[-\mathrm{i}2n(\theta\pm\pi)]\\&=\exp(-\mathrm{i}\,2n\theta)。\end{aligned}\tag{2.129}$$

由(2.128)式，得能量的量子化值为

$$E=-\frac{(f^2-g^2)^2}{4\mu}s^2=-\frac{(f^2-g^2)^2}{4\mu}\left[\frac{\sqrt{2}\mu k}{n(f^2-g^2)}\right]^2=-\frac{\mu k^2}{2n^2}。\tag{2.130}$$

从以上的讨论可以看到，使用了合适的表象，就可以方便地求得动力学解，这正是狄拉克表象理论的精华所在。而纠缠态表象应该是量子力学中一个不可或缺的表象。

2.12 用$|\eta\rangle$表象寻求广义压缩算符[27]

用$|\eta\rangle$表象可以寻求推广的双模压缩算符，先把$|\eta\rangle$表象改写为

$$\begin{aligned}|\eta\rangle=\left|\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\right\rangle&=\exp\left[-\frac{1}{2}(\eta_1\quad\eta_2)\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}+(a_1^\dagger-a_2^\dagger\quad ia_1^\dagger+ia_2^\dagger)\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}+a_1^\dagger a_2^\dagger\right]|0,0\rangle\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\eta}\eta+A^\dagger\eta+a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|0,0\rangle,\end{aligned}\tag{2.131}$$

式中

$$A^\dagger=(a_1^\dagger-a_2^\dagger\quad ia_1^\dagger+ia_2^\dagger),\ \eta\equiv\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix},\ \widetilde{A}=\begin{pmatrix}a_1-a_2\\-ia_1-ia_2\end{pmatrix}。\tag{2.132}$$

构造以下积分型的投影算符(广义压缩算符)：

$$S(\Lambda)=(\det\Lambda)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\eta}{\pi}\left|\Lambda\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\right|。\tag{2.133}$$

显然它是幺正的，且满足乘法规则：

$$\begin{aligned}S(\Lambda_1)S(\Lambda_2)&=(\det\Lambda_1\Lambda_2)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\eta}{\pi}\left|\Lambda_1\Lambda_2\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\right|\\&=S(\Lambda_1\Lambda_2)。\end{aligned}\tag{2.134}$$

用有序算符内的积分技术，可得$S(\Lambda)$的正规乘积展开：

$$S(\Lambda) = (\det\Lambda)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\eta}{\pi} : \exp\Big[-\frac{1}{2}\tilde{\eta}(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)\eta$$

$$+\tilde{\eta}(\tilde{\Lambda}\tilde{A}^{\dagger}+\tilde{A})+a_1a_2+a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}-a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2\Big]:$$

$$=\left[\frac{\det\Lambda)}{\det\left(\frac{1+\tilde{\Lambda}\Lambda}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} : \exp\Big[\frac{1}{2}(A^{\dagger}\Lambda+A)$$

$$\cdot(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}(\tilde{\Lambda}\tilde{A}^{\dagger}+\tilde{A})+(a_1-a_2^{\dagger})(a_2-a_1^{\dagger})\Big]:$$

$$=\left[\frac{\det\Lambda}{\det\left(\frac{1+\tilde{\Lambda}\Lambda}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} : \exp\Big\{(A^{\dagger}A)\Big[\frac{1}{2}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\Lambda(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}\tilde{\Lambda} & \Lambda(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}\\ (1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}\tilde{\Lambda} & (1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big]\begin{pmatrix}\tilde{A}^{\dagger}\\ \tilde{A}\end{pmatrix}\Big\} :, \tag{2.135}$$

推导中用到了公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}d^n x\exp(-\tilde{x}Nx+\tilde{x}\nu)=\pi^{\frac{n}{2}}(\det N)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{4}\tilde{\nu}N^{-1}\nu\right), \tag{2.136}$$

式中：$\tilde{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\tilde{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$，$N$是个$n\times n$矩阵。

引入双模光场的两个相互正交的分量(算符)：

$$X=\frac{1}{2}(X_1+X_2),\ P=\frac{1}{2}(P_1+P_2),\ [X,P]=\frac{i}{2}。 \tag{2.137}$$

根据本征方程(2.9)，有

$$S^{\dagger}(\Lambda)PS(\Lambda)=S^{\dagger}(\Lambda)(\det\Lambda)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\eta}{\sqrt{2}\pi}(\Lambda_{21}\eta_1+\Lambda_{22}\eta_2)$$

$$\left|\Lambda\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}[\Lambda_{21}(X_1-X_2)+\Lambda_{22}(P_1+P_2)]。\qquad(2.138)$$

另一方面，为了知道 X 在 $S^{\dagger}(\Lambda)$变换下的行为，将(2.101)式中的 $|\zeta\rangle_{g=0}$态改写为

$$|\zeta\rangle_{g=0}\Rightarrow\exp\left(-\frac{1}{2}|\zeta|^2+\zeta a_1^{\dagger}+\zeta^* a_2^{\dagger}-a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\right)|0,0\rangle\equiv|\zeta\rangle,\qquad(2.139)$$

按$|\zeta\rangle$的完备性展开$|\eta\rangle$，得到

$$|\eta\rangle=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\langle\zeta|\eta\rangle=\frac{1}{2}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\exp[-i(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)],\qquad(2.140)$$

说明$|\eta\rangle$与$|\zeta\rangle$互为傅氏变换，或称为互为共轭的纠缠态，这样就有

$$\left|\Lambda\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{1}{2}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\exp\{-i[(\Lambda_{11}\eta_1+\Lambda_{12}\eta_2)\zeta_2-(\Lambda_{21}\eta_1+\Lambda_{22}\eta_2)\zeta_1]\}。\qquad(2.141)$$

用(2.133)式和(2.141)式，就可以把 $S(\Lambda)$在$|\zeta\rangle$表象中表示出来：

$$\begin{aligned}S(\Lambda)=&\frac{1}{4}(\det\Lambda)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\eta}{\pi}\int\frac{d^2\zeta'}{\pi}|\zeta'\rangle\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\langle\zeta|\exp[i(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)]\\&\cdot\exp\{-i[(\Lambda_{11}\eta_1+\Lambda_{12}\eta_2)\zeta'_2-(\Lambda_{21}\eta_1+\Lambda_{22}\eta_2)\zeta'_1]\}\\=&(\det\Lambda)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\left|\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{bmatrix}\Lambda_{22}&-\Lambda_{12}\\-\Lambda_{21}&\Lambda_{11}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\right|\\=&(\det\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\left|\frac{1}{\det\Lambda}\Lambda\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\right|。\end{aligned}\qquad(2.142)$$

由$|\zeta\rangle$所满足的本征方程

$$(X_1+X_2)|\zeta\rangle=\sqrt{2}\zeta_1|\zeta\rangle,\ (P_1-P_2)|\zeta\rangle=\sqrt{2}\zeta_2|\zeta\rangle\qquad(2.143)$$

和(2.142)式，就可得到 X 在 $S(\Lambda)$变换下的变换规律

$$S^{\dagger}(\Lambda)XS(\Lambda)=\int\frac{d^2\zeta}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{\det\Lambda}(\Lambda_{11}\zeta_1+\Lambda_{12}\zeta_2)\left|\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2\det\Lambda}[\Lambda_{11}(X_1+X_2)+\Lambda_{12}(P_1-P_2)]。\quad(2.144)$$

由(2.135)式又知广义双模压缩真空态是

$$\|0\rangle=S(\Lambda)|0,0\rangle=\left[\det\left(\frac{1+\tilde{\Lambda}\Lambda}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left[\frac{1}{2}A^{\dagger}\Lambda(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}\tilde{\Lambda}\tilde{A}^{\dagger}+a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\right]|0,0\rangle,\quad(2.145)$$

由(2.138)式与(2.144)式得

$$\langle 0\|X\|0\rangle=0,\langle 0\|P\|0\rangle=0。\quad(2.146)$$

故光场的两个正交分量的量子起伏是

$$(\Delta X)^2=\langle 0\|X^2\|0\rangle=\frac{\Lambda_{11}^2+\Lambda_{12}^2}{4(\det\Lambda)^2},$$
$$(\Delta P)^2=\langle 0\|P^2\|0\rangle=\frac{\Lambda_{21}^2+\Lambda_{22}^2}{4}。\quad(2.147)$$

特别当 $\Lambda_{11}=\Lambda_{22}=\mu,\Lambda_{12}=\Lambda_{21}=0$ 时，$(\Delta X)^2=\frac{1}{4\mu^2}$，$(\Delta P)^2=\frac{\mu^2}{4}$。

习　　题

1. 求算符 $\exp[f(a_1-a_2)^2]\exp[g(a_1^{\dagger}-a_2^{\dagger})^2]$的正规乘积展开式。

2. 求证 $\exp[g(X_1+X_2)^2]|0,0\rangle$是一个广义压缩态，并求其压缩效应，即求光场正交分量在此态的均方差值。

3. 试讨论相干-纠缠态与 EPR 纠缠态的关系。

4. 求压缩$|\eta,\theta\rangle$为$\frac{1}{\mu}|\frac{\eta}{\mu},\theta\rangle$的压缩算符。

5. 对双模压缩光场的一个场模作单模正交场分量的测量，求光场的另一个场模的坍缩情况。

第三章

相干态和 IWOP 技术、相干态和菲涅耳变换

3.1 相干态完备性的正规乘积形式与应用

利用有序算符内的积分技术，可以探索相干态的若干新性质。相干态这一重要的物理概念，最早由薛定谔于 1926 年提出，尽管当时未以相干态命名，但他对于谐振子位势的研究中，找到了某个量子力学态，该态遵从类似于经典粒子的演化规律。到了 1961 年，美国物理学家、数学家 Klauder 首先从数学形式上给出了谐振子相干态在 Fock 空间中的表达式[28]，并用它讨论了路径积分。到了 1963 年，美国物理学家 Glauber 把相干态用于研究光的相干性，并认为激光的量子力学解释就是相干态[29]，使量子光学成了一门新学科，他因此获得 2005 年诺贝尔物理奖。Glauber 并明确指出谐振子相干态（记为$|z\rangle$）是玻色子湮灭算符的本征态：

$$a \mid z\rangle = z \mid z\rangle \tag{3.1}$$

由玻色算符的基本对易关系$[a,a^\dagger]=1$，容易证明归一化的相干态是

$$\mid z\rangle = \exp\left(-\frac{\mid z\mid^2}{2} + za^\dagger\right)\mid 0\rangle, \tag{3.2}$$

式中$|0\rangle$是基态，满足$a|0\rangle=0$，$\langle z|z\rangle=1$。用 Baker-Hausdorff 公式：

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A\mathrm{e}^{[A,B]},\ [A,B]=C,$$

式中 C 是普通数，可知相干态之间互相不正交：

$$\langle z' \mid z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|z'|^2}{2} + z'^* z\right)。\tag{3.3}$$

这个性质又导致了相干态是过完备的(over complete)：

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid z\rangle\langle z \mid = 1, \quad z = x + iy, \tag{3.4}$$

式中 $d^2 z \equiv dx dy$。以下用有序算符内的积分技术证明之。用(1.15)式得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(-|z|^2 + z a^\dagger) \mid 0\rangle\langle 0 \mid \exp(z^* a) \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} : \exp(-|z|^2 + z a^\dagger + z^* a - a^\dagger a) : \\
&= : \exp(a^\dagger a - a^\dagger a) : = 1。
\end{aligned}\tag{3.5}$$

或可把(3.4)式写为

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid z\rangle\langle z \mid &= \int \frac{d^2 z}{\pi} : \exp[-(z^* - a^\dagger)(z - a)] : \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} : \exp(-|z - a|^2) : \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(-|z|^2) = 1。
\end{aligned}\tag{3.6}$$

由于相干态的互不正交，过完备性表明一个相干态可以用其他相干态来表示：

$$\begin{aligned}
\mid z'\rangle &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \mid z\rangle\langle z \mid z'\rangle \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2) + z^* z'\right] \mid z\rangle。
\end{aligned}\tag{3.7}$$

把 IWOP 技术和以下的数学公式相结合，可以得到用其他方法难以得到的不少算符恒等式。一个典型的积分公式是[30]

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + g z^{*2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right),
\end{aligned}\tag{3.8}$$

此积分的收敛条件是

$$\mathrm{Re}(\zeta - f - g) < 0,\ \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta - f - g}\right) < 0, \tag{3.9}$$

或者是

$$\mathrm{Re}(\zeta + f + g) < 0,\ \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta + f + g}\right) < 0。 \tag{3.10}$$

特别当 $f=g=0$,(3.8)式简化为

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^*) = -\frac{1}{\xi}\exp\left(\frac{-\xi\eta}{\zeta}\right),\ \mathrm{Re}\xi < 0。$$

用(3.8)式可以计算以下积分而得到 $\exp(\lambda a^2)\exp(\sigma a^{\dagger 2})$ 的正规乘积展开:

$$\exp(\lambda a^2)\exp(\sigma a^{\dagger 2}) = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp(\lambda z^2 + \sigma z^{*2}) |z\rangle\langle z|。$$

此积分留给有兴趣的读者作为练习。用 IWOP 技术可以很方便地导出

$$\exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) = :\exp[a_i^\dagger (\mathrm{e}^{\Omega} - \mathbb{1})_{ij} a_j]: \tag{3.11}$$

式中$\mathbb{1}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵。这里的重复指标代表从 $1\to n$ 求和。记 $|\mathbf{Z}\rangle$为 n 模相干态,

$$\begin{aligned}
\exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) &= \int \prod_i^n \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi} \exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) |\mathbf{Z}\rangle\langle\mathbf{Z}| \\
&= \int \prod_i^n \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi} \exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) \\
&\quad \cdot \exp\left(a_i^\dagger z_i - \frac{1}{2} z_i z_i^*\right) |\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{Z}| \\
&= \int \prod_i^n \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi} \exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) \\
&\quad \cdot \exp\left(a_i^\dagger z_i - \frac{1}{2} z_i z_i^\dagger\right) \exp(-a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) \\
&\quad \cdot \exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) |\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{Z}|,
\end{aligned}$$

注意到:

$$\exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) a_l^\dagger \exp(-a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) = a_l^\dagger (\mathrm{e}^{\Omega})_{il}$$

和

$$\exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) \mid \mathbf{0}\rangle = \mid \mathbf{0}\rangle。$$

用有序算符内积分技术得算符恒等式：

$$\exp(a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j) = \int \prod_i^n \left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right) \colon \exp[a_i^\dagger (\mathrm{e}^{\Omega})_{il} z_l - z_i z_i^* + a_i z_i^* - a_i^\dagger a_i] \colon$$

$$= \colon \exp[a_i^\dagger (\mathrm{e}^{\Omega} - \mathbb{1})_{ij} a_j] \colon。$$

3.2 用正规乘积内积分技术导出若干算符恒等式[31]~[33]

用正规乘积内积分技术可方便地导出算符恒等式。例如要把反正规排序的算符 $a^n a^{\dagger m}$ 重排为正规乘积，以求得其相干态矩阵元，用(3.5)式及 IWOP 技术得

$$a^n a^{\dagger m} = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \mid z\rangle\langle z \mid$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \colon \exp(-\mid z \mid^2 + z a^\dagger + z^* a - a^\dagger a) \colon$$

$$= \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \colon \frac{n!m!}{l!(n-l)!(m-l)!} a^{\dagger m-l} a^{n-l} \colon。\tag{3.12}$$

其间用了数学公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(A \mid z \mid^2 + Bz + Cz^*)$$

$$= \exp\left(-\frac{BC}{A}\right) \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{n!m!}{l!(n-l)!(m-l)!(-A)^{n+m-l+1}} B^{m-l} C^{n-l},$$

$$\mathrm{Re} A < 0。\tag{3.13}$$

形式上记

$$\sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{n!m!}{l!(n-l)!(m-l)!} \alpha^{m-l} \beta^{n-l} (-1)^l = \mathrm{H}_{m,n}(\alpha, \beta),$$

$$\tag{3.14}$$

则(3.12)式可简记为

$$a^n a^{\dagger m} = (-\mathrm{i})^{m+n} : \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) :。\tag{3.15}$$

于是可把恒等式

$$a^{n+1} a^{\dagger m} = a^n (a^{\dagger m} a + m a^{\dagger m-1})\tag{3.16}$$

转化为

$$: \mathrm{H}_{m,n+1}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : - : \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : \mathrm{i}a + m : \mathrm{H}_{m-1,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : = 0,\tag{3.17}$$

两边取相干态$\langle -\mathrm{i}\alpha^* |$与$| -\mathrm{i}\beta\rangle$这样的矩阵元，得

$$[\mathrm{H}_{m,n+1}(\alpha,\beta) - \beta \mathrm{H}_{m,n}(\alpha,\beta) + m \mathrm{H}_{m-1,n}(\alpha,\beta)]\langle -\mathrm{i}\alpha^* | -\mathrm{i}\beta\rangle = 0,\tag{3.18}$$

亦即上式中方括号等于 0。另一方面，由

$$a^n a^{\dagger m+1} = (a^\dagger a^n + n a^{n-1}) a^{\dagger m},\tag{3.19}$$

知

$$(-\mathrm{i})^{m+n+1} : \mathrm{H}_{m+1,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : - a^\dagger (-\mathrm{i})^{m+n} : \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : - n(-\mathrm{i})^{m+n-1} : \mathrm{H}_{m,n-1}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : = 0,\tag{3.20}$$

这说明

$$\mathrm{H}_{m+1,n}(\alpha,\beta) - \alpha \mathrm{H}_{m,n}(\alpha,\beta) + n \mathrm{H}_{m,n-1}(\alpha,\beta) = 0。\tag{3.21}$$

以上表明由正规乘积内积分技术不但可方便快捷地导出若干算符恒等式，也可导出某些特殊函数如 $\mathrm{H}_{m,n}(\alpha,\beta)$的性质。

3.3　用 IWOP 技术求热库中一个中心振子的时间演化

在量子光学理论中经常讨论浸在一个热库中一个中心振子的动力学演化。设中心振子与热库的相互作用哈密顿量是

$$V^{(\mathrm{I})} = \sum_{l=1}^{N} (w_l a b_l^\dagger + w_l^* a^\dagger b_l)。\tag{3.22}$$

在相互作用图像中态矢量的时间演化遵守方程

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid\psi,t\rangle^{(\mathrm{I})}=V^{(\mathrm{I})}\mid\psi,t\rangle^{(\mathrm{I})}。\tag{3.23}$$

为了求 $\exp(-\mathrm{i}V^{(\mathrm{I})}t)$的正规乘积展开式,令 $S=\mathrm{i}V^{(\mathrm{I})}t$,则可证明

$$\mathrm{e}^{-S}a\,\mathrm{e}^{S}=a\cos\Omega+\mathrm{i}\frac{1}{\Omega}\sin\Omega\sum_{l=1}^{N}g_l^*b_l,\tag{3.24}$$

$$\Omega=t\left(\sum_{l=1}^{N}\mid w_l\mid^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad g_l=tw_l。\tag{3.25}$$

(3.25)式的证明如下:引入一个连续变数 σ,构造如下变换:

$$a(\sigma)\equiv\mathrm{e}^{-\sigma S}a(0)\mathrm{e}^{\sigma S},\quad b_l(\sigma)\equiv\mathrm{e}^{-\sigma S}b_l(0)\mathrm{e}^{\sigma S},\tag{3.26}$$

使得

$$a(0)=a,\quad a(1)=\mathrm{e}^{-S}a\,\mathrm{e}^{S};\quad b(0)=b,\quad b(1)=\mathrm{e}^{-S}b\mathrm{e}^{S}。$$

由(3.22)式和(3.26)式,得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}a(\sigma)&=[a(\sigma),S]=[\mathrm{e}^{-\sigma S}a\,\mathrm{e}^{\sigma S},S]\\&=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\sigma S}\sum_{l=1}^{N}g_l^*b_l\mathrm{e}^{\sigma S}=\mathrm{i}\sum_{l=1}^{N}g_l^*b_l(\sigma)。\end{aligned}\tag{3.27}$$

类似地,可以导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}b_l(\sigma)=[b_l(\sigma),S]=\mathrm{i}a(\sigma)g_l。$$

更进一步,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\sigma^2}b_l(\sigma)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}[\mathrm{e}^{-\sigma S}b(0)\mathrm{e}^{\sigma S},S]\\&=[b_l(\sigma),S]S+S[S,b_l(\sigma)]\\&=\mathrm{i}a(\sigma)g_lS-\mathrm{i}Sa(\sigma)g_l\\&=-g_l\sum_{l'=1}^{N}g_{l'}^*b_{l'}(\sigma),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\sigma^2}a(\sigma)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}[a(\sigma),S]\\&=[a(\sigma),S]S+S[S,a(\sigma)]\end{aligned}$$

$$= \mathrm{i}\sum_{l=1}^{N} g_l^* [b_l(\sigma), S]$$

$$= -a(\sigma)\sum_{l=1}^{N} |g_l|^2,$$

由此解出通解

$$a(\sigma) = C_1\cos(\Omega\sigma) + C_2\sin(\Omega\sigma),$$

式中 $C_1 = a(\sigma)|_{\sigma=0} = a$，而 C_2 由下式定出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}a(\sigma)\,|_{\sigma=0} = [a\Omega\sin(\Omega\sigma) + C_2\Omega\cos(\Omega\sigma)]\,|_{\sigma=0} = \mathrm{i}\sum_{l=1}^{N} g_l^* b_l,$$

即

$$C_2 = \mathrm{i}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{l=1}^{N} g_l^* b_l,$$

从而证得(3.24)式：

$$a(\sigma=1) \to \mathrm{e}^{-S} a\,\mathrm{e}^{S} = a\cos\Omega + \mathrm{i}\,\frac{1}{\Omega}\sin\Omega\sum_{l=1}^{N} g_l^* b_l。$$

另一方面，由(3.24)式和(3.27)式得

$$b_l(\sigma) = \int \mathrm{d}\sigma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}b_l(\sigma) = \mathrm{i}g_l\int \mathrm{d}\sigma\, a(\sigma)$$

$$= \mathrm{i}g_l\int \mathrm{d}\sigma\left[a\cos(\Omega\sigma) + \mathrm{i}\,\frac{1}{\Omega}\sum_{l'=1}^{N} g_{l'}^* b_{l'}\sin(\Omega\sigma)\right],$$

$$= \mathrm{i}a\,\frac{1}{\Omega}g_l\sin(\Omega\sigma) + g_l\,\frac{1}{\Omega^2}\sum_{l'=1}^{N} g_{l'}^* b_{l'}\cos(\Omega\sigma) + C_3,$$

式中 C_3 是积分常数。在上式令 $\sigma=0$，得

$$C_3 = b_l - \frac{g_l}{\Omega^2}\sum_{l'=1}^{N} g_{l'}^* b_{l'},$$

于是给出 b_l 在 e^{-S}下的变换为

$$b_l(1) = \mathrm{e}^{-S} b_l \mathrm{e}^{S} = b_l + \mathrm{i}a\,\frac{1}{\Omega}g_l\sin\Omega - g_l\,\frac{1}{\Omega^2}(1-\cos\Omega)\sum_{l'=1}^{N} g_{l'}^* b_{l'}。\tag{3.28}$$

利用未归一化的中心振子和热库的相干态 $\| z;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N\rangle$ 的超

完备性关系：

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}\int \prod_l^N \frac{d^2\beta_l}{\pi} \| z;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N\rangle\langle z;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N \|$$

$$\cdot \exp\left(-|z|^2-\sum_{l=1}^N |\beta_l|^2\right)=1, \tag{3.29}$$

及(3.24)式、(3.28)式，可以将 e^{-S} 展开为

$$e^{-S}=\int \frac{d^2 z}{\pi}\int \prod_l^N \frac{d^2\beta_l}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z|^2+\sum_{l=1}^N |\beta_l|^2\right)\right]$$

$$\cdot e^{-S}\exp\left(za^{\dagger}+\sum_{l=1}^N \beta_l b_l^{\dagger}\right)e^S e^{-S}\mid 0;0,\cdots,0\rangle\langle z;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N \mid$$

$$=\int \frac{d^2 z}{\pi}\int \prod_l^N \frac{d^2\beta_l}{\pi}: \exp\left\{-|z|^2-\sum_{l=1}^N |\beta_l|^2\right.$$

$$+z\left(a^{\dagger}\cos\Omega-i\frac{1}{\Omega}\sin\Omega\sum_{l=1}^N g_l b_l^{\dagger}\right)$$

$$+\sum_{l=1}^N \beta_l\left[b_l^{\dagger}-ia^{\dagger}\frac{g_l^*}{\Omega}\sin\Omega-\frac{g_l^*}{\Omega^2}(1-\cos\Omega)\sum_{k=l}^N g_k b_k^{\dagger}\right]$$

$$\left.+z^*a-a^{\dagger}a+\sum_{l=1}^N \beta_l^* b_l-\sum_{l=1}^N b_l^{\dagger}b_l\right\}:$$

$$=:\exp\left[a^{\dagger}a(\cos\Omega-1)-i\sum_{l=1}^N \frac{g_l}{\Omega}b_l^{\dagger}a\sin\Omega\right.$$

$$\left.-i\sum_{l=1}^N \frac{g_l^*}{\Omega}b_l a^{\dagger}\sin\Omega-\sum_{l=1}^N b_l\frac{g_l^*}{\Omega^2}(1-\cos\Omega)\sum_{k=1}^N g_k b_k^{\dagger}\right]:。 \tag{3.30}$$

因此当系统的初态为相干态时，经过一段时间 t 后，它演化为

$$e^{-S}\| z;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N\rangle=\exp\left[a^{\dagger}z(\cos\Omega-1)-i\frac{z}{\Omega}\sin\Omega\sum_{l=1}^N g_l b_l^{\dagger}\right.$$

$$-ia^{\dagger}\sum_{l=1}^N \beta_l\frac{g_l^*}{\Omega}\sin\Omega-\sum_{l=1}^N \beta_l\frac{g_l^*}{\Omega^2}$$

$$\cdot (1-\cos\Omega)\sum_{k=l}^{N} g_k b_k^{\dagger}\Big] \| z;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\rangle。\quad (3.31)$$

特别当热库的初态为真空态时，上式变为

$$\begin{aligned} e^{-S} \| z;0,0,\cdots,0_N\rangle &= \exp\left(a^{\dagger} z\cos\Omega - \mathrm{i}\sum_{l=1}^{N} \frac{g_l}{\Omega} b_l^{\dagger} z\sin\Omega\right) \| z;0,0,\cdots,0_N\rangle \\ &= \| z\cos\Omega, -\mathrm{i}\frac{g_1}{\Omega} z\sin\Omega, -\mathrm{i}\frac{g_2}{\Omega} z\sin\Omega, \\ &\quad \cdots, -\mathrm{i}\frac{g_N}{\Omega} z\sin\Omega\rangle。\end{aligned} \quad (3.32)$$

由此看出，它是一个 N 模相干态，中心振子的能量从原来的 $\langle z|a^{\dagger}a|z\rangle$ 耗散为 $\langle z\cos\Omega|a^{\dagger}a|z\cos\Omega\rangle$ 了，其损失的能量被热库中的振子吸收。

3.4　三参数单模压缩算符的相干态表象——辛群表示[34]

以下用IWOP技术计算不对称 ket-bra 积分型算符：

$$U(r,s)=\sqrt{s}\int\frac{d^2 z}{\pi}\,|sz-rz^*\rangle\langle z|, \quad (3.33)$$

式中 s,r 是复数，满足性质 $ss^*-rr^*=1$，

$$\begin{aligned} |sz-rz^*\rangle &\equiv \left|\begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|sz-rz^*|^2+(sz-rz^*)a^{\dagger}\right]|0\rangle。\end{aligned} \quad (3.34)$$

积分后用(3.11)式，得到

$$\begin{aligned} U(r,s)=\sqrt{s}\int\frac{d^2 z}{\pi} :\exp\Big[&-|s|^2|z|^2+\frac{r^*s}{2}z^2 \\ &+\frac{rs^*}{2}z^{*2}+(sz-rz^*)a^{\dagger}+z^*a-a^{\dagger}a\Big]: \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{r}{2s^*}a^{\dagger 2}\right)\exp\left[\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{s^*}\right]\exp\left(\frac{r^*}{2s^*}a^2\right), \tag{3.35}$$

故有

$$\begin{aligned} U^\dagger aU &= sa - ra^\dagger, \\ a^\dagger &= U^\dagger a^\dagger U = -r^* a + s^* a^\dagger。\end{aligned} \tag{3.36}$$

可见它是一个单模压缩算符(试与(1.29)式比较之)。(3.33)式表明经典变换$(z,z^*)\to(sz-rz^*,r^*z+s^*z^*)$映射出了 Fock 空间的幺正压缩变换,所以(3.33)式称为三参数单模压缩算符的相干态投影算符表示。

以下要揭示这个表示的一个重要性质,即它构成了一个辛群(symplectic group)的一个投影算符表示。对于没有学过群论与群表示知识的读者,以下将把这一表述改为证明

$$U(r,s)U(r',s') = U(r'',s''), \tag{3.37}$$

即要证明$U(r,s)$具有以下的乘法规则(注意$s's'^*-r'r'^*=1$):

$$\begin{aligned} &\sqrt{ss'}\int\frac{d^2zd^2z'}{\pi^2}\left|\begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z^*\end{pmatrix}\right\rangle\langle z|\begin{pmatrix} s' & -r' \\ -r'^* & s'^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' \\ z'^*\end{pmatrix}\rangle\langle z'| \\ =&\sqrt{s''}\int\frac{d^2z}{\pi}\left|\begin{pmatrix} s'' & -r'' \\ -r''^* & s''^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z^*\end{pmatrix}\right\rangle\langle z|。\end{aligned} \tag{3.38}$$

要紧的是这里的经典变换矩阵自动满足乘法规则

$$\begin{pmatrix} s'' & -r'' \\ -r''^* & s''^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s' & -r' \\ -r'^* & s'^*\end{pmatrix}, \tag{3.39}$$

即$s''=ss'+rr'^*$,$r''=rs'^*+r's$,因此也就自动保证了

$$s''s''^*-r''r''^*=1。 \tag{3.40}$$

如能证明(3.38)式成立,就表示矩阵的乘法规则(3.39)式能映射为以相干态 ket-bra 投影算符(3.38)式为表示的压缩算符的乘法规则(用群表示的语言来说,就是这一相干态投影算符表示实现了辛群的乘法)。这一性质十分重要,因为它保证可连续多次的压缩变换的结果仍是一个压缩变换,其最终的压缩变换系数是把多个

连续变换的变换群相乘的结果。

以下用(3.3)式及IWOP技术计算(3.38)式的左边，得到

$$U(r,s)U(r',s') = \sqrt{ss'}\int\frac{d^2zd^2z'}{\pi^2}|sz-rz^*\rangle\langle z|s'z'-r'z'^*\rangle\langle z'|$$

$$= \sqrt{ss'}\int\frac{d^2zd^2z'}{\pi^2}|sz-rz^*\rangle\langle 0|$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{|z|^2+|z'|^2+|s'z'-r'z'^*|^2}{2}\right.$$

$$\left.+z^*(s'z'-r'z'^*)+z'^*a\right]$$

$$= \frac{\sqrt{ss'}}{|s'|}\int\frac{d^2z}{\pi}|sz-rz^*\rangle\langle 0|\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{r'^*s'a^2}{2}+z^*s'a-\frac{z^{*2}r's'}{2}}{|s'|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^*s'^*+r^*r'}}\exp\left[-\frac{rs'^*+r's}{2(s^*s'^*+r^*r')}a^{\dagger 2}\right]$$

$$\cdot:\exp\left[\left(\frac{1}{s^*s'^*+r^*r'}-1\right)a^\dagger a\right]:$$

$$\cdot\exp\left[\frac{r'^*(s^*s'^*+r^*r')+r^*}{2s'^*(s^*s'^*+r^*r')}a^2\right]。\tag{3.41}$$

由(3.39)式可见

$$\frac{r'^*(s^*s'^*+r^*r')+r^*}{s'^*} = r^*s'+r'^*s^* = r''^*,$$

故有

$$U(r,s)U(r',s') = \frac{1}{\sqrt{s''^*}}\exp\left(-\frac{r''}{2s''^*}a^{\dagger 2}\right)$$

$$\cdot:\exp\left[\left(\frac{1}{s''^*}-1\right)a^\dagger a\right]:\exp\left(\frac{r''^*}{2s''^*}a^2\right) = U(r'',s''),\tag{3.42}$$

于是乘法规则得证。为了进一步检验这个辛变换的相干态投影算

符表示是个幺正表示，注意到

$$\begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s^* & r \\ r^* & s \end{pmatrix},$$

所以有

$$\begin{aligned} U^{-1}(r,s) = U^{\dagger}(r,s) &= \sqrt{s^*}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \mid z\rangle\langle sz - rz^* \mid \\ &= \sqrt{s^*}\int \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\pi} \mid s^* z' + r z'^* \rangle\langle z' \mid \\ &= U(-r, s^*)。 \end{aligned} \tag{3.43}$$

可以进而说明

$$\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

是一个辛变换。把相干态写成正则形式

$$\begin{aligned} \mid z\rangle \equiv \mid \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\rangle \equiv \mid q,p\rangle &= \exp[\mathrm{i}(pQ - qP)] \mid 0\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{4}(p^2+q^2) + \frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}a^{\dagger}\right] \mid 0\rangle, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p)。 \end{aligned} \tag{3.45}$$

相应地，(3.33)式纳入以下形式：

$$U(r,s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi}\int \mathrm{d}q\mathrm{d}p \mid \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\rangle\langle\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\mid, \tag{3.46}$$

式中 $AD-BC=1$，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s+s^*-r-r^* & \mathrm{i}(s-s^*+r-r^*) \\ -\mathrm{i}(s-s^*-r+r^*) & s+s^*+r+r^* \end{bmatrix} \equiv G。 \tag{3.47}$$

所以在$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$相空间中的变换：

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

是一个辛变换，因为它满足

$$G\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\tilde{G} = \tilde{G}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}。 \quad (3.49)$$

压缩算符的相干态投影算符形式不但可以利用其群的性质简化多个压缩过程为一个单压缩行为，而且可以用来导出粒子态 $|n\rangle$ 被压缩后的压缩粒子态。利用积分公式(3.8)，得到

$$\begin{aligned}
U(r,s)\mid n\rangle &= \sqrt{s}\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid sz - rz^*\rangle\langle z\mid n\rangle = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{n!}}\int \frac{d^2 z}{\pi} z^{*n} \\
&\quad \cdot \exp\left(-\mid sz\mid^2 + \frac{r^* s z^2 + r s^* z^{*2}}{2} + s a^\dagger z - r a^\dagger z^*\right)\mid 0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^* n!}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-r\sqrt{-\frac{r^*}{2s^*}}a^\dagger\right)^k \\
&\quad \cdot \mathrm{H}_{k+n}\left(-\sqrt{-\frac{s^*}{2r^*}}s a^\dagger\right)\left(\sqrt{-\frac{r^*}{2s^*}}\right)^n \exp\left(\frac{r s a^{\dagger 2}}{2}\right)\mid 0\rangle。
\end{aligned} \quad (3.50)$$

这里在差到一个相因子的程度上已把 $s^{*-\frac{1}{2}}|s|$ 视为 s，而且在推导中已用到了关于厄米特多项式的母函数公式：

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_n(x)}{n!}t^n = \exp(2xt - t^2), \\
&\frac{\partial^n}{\partial t^n}\exp(ft^2 + 2xt) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\sqrt{-f})^n}{(k-n)!}(\sqrt{-f}t)^{k-n}\mathrm{H}_k\left(\frac{x}{\sqrt{-f}}\right),
\end{aligned} \quad (3.51)$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^2 z}{\pi} z^{*n}\exp(\zeta\mid z\mid^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + g z^{*2}) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial \eta^n}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}}\exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sqrt{\frac{f}{4fg - \zeta^2}}\eta\right)^k
\end{aligned}$$

$$\cdot \mathrm{H}_{k+n}\left[\frac{\frac{-\zeta\xi}{2(\zeta^2-4fg)}}{\sqrt{-\frac{f}{\zeta^2-4fg}}\left(\sqrt{\frac{f}{4fg-\zeta^2}}\right)^n}\right]$$

$$\cdot \exp\left(\frac{\xi^2 g}{\zeta^2-4fg}\right)。 \tag{3.52}$$

3.5　三参数双模压缩算符——相干态投影算符作为辛群表示[35]

可以把上节的讨论推广到双模相干态$|z_1,z_2\rangle$表象情况。建立如下的 ket-bra 积分型投影算符：

$$U_2(r,s)=s\int\frac{1}{\pi^2}\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2\;|sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2\rangle\langle z_1,z_2|, \tag{3.53}$$

式中$|s|^2-|r|^2=1$。用 IWOP 技术积分之，得

$$\begin{aligned}U_2(r,s)=&s\int\frac{1}{\pi^2}\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2 :\exp[-|s|^2(|z_1|^2+|z_2|^2)\\&-r^*sz_1z_2-rs^*z_1^*z_2^*+(sz_1+rz_2^*)a^\dagger\\&+(rz_1^*+sz_2)b^\dagger+z_1^*a+z_2^*b-a^\dagger a-b^\dagger b]:\\=&\exp\left(\frac{r}{s^*}a^\dagger b^\dagger\right)\exp[(a^\dagger a+b^\dagger b+1)\ln(s^*)^{-1}]\\&\cdot\exp\left(-\frac{r^*}{s^*}ab\right)。\end{aligned} \tag{3.54}$$

可见它是一个三参数双模压缩算符，生成幺正变换：

$$U_2aU_2^{-1}=s^*a-rb^\dagger,\ U_2bU_2^{-1}=s^*b-ra^\dagger。 \tag{3.55}$$

(3.53)式与(3.54)式表明双模压缩算符$U_2(r,s)$也是辛变换$(z_1,z_2)\to(sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2)$在希尔伯特空间中的映象。为了进一步证明(3.53)式代表的$U_2(r,s)$的相干态投影算符表示是成群的，计算乘积

$$
\begin{aligned}
&U_2(r,s)U_2(r',s')\\
&=ss'\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\,|sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2\rangle\langle z_1,z_2|\\
&\quad\cdot\int\frac{d^2z_1'd^2z_2'}{\pi_2}\,|s'z_1'+r'z_2'^*,r'z_1'^*+s'z_2'\rangle\langle z_1',z_2'|\\
&=ss'\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\frac{d^2z_1'd^2z_2'}{\pi^2}\,|sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2\rangle\langle z_1',z_2'|\\
&\quad\cdot\exp\Big[z_1^*(s'z_1'+r'z_2'^*)+z_2^*(r'z_1'^*+s'z_2')\\
&\quad-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2+|s'z_1'+r'z_2'^*|^2\\
&\quad+|r'z_1'^*+s'z_2'|^2)\Big]\\
&=ss'\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\frac{d^2z_1'd^2z_2'}{\pi^2}:\exp[-|s|^2(|z_1|^2+|z_2|^2)\\
&\quad-r^*sz_1z_2-rs^*z_1^*z_2^*+(sz_1+rz_2^*)a^\dagger+(rz_1^*+sz_2)b^\dagger\\
&\quad+z_1'^*a+z_2'^*b+z_1^*(s'z_1'+r'z_2'^*)+z_2^*(r'z_1'^*+s'z_2')\\
&\quad-\frac{1}{2}(|z_1'|^2+|z_2'|^2+|s'z_1'+r'z_2'^*|^2+|r'z_1^*+s'z_2'|^2)\\
&\quad-a^\dagger a-b^\dagger b]:\\
&=\frac{1}{s'^*s^*+r'r^*}\exp\left(\frac{rs'^*+r's}{s'^*s^*+r'r^*}b^\dagger a^\dagger\right):\exp\Big[\left(\frac{1}{s'^*s^*+r'r^*}-1\right)\\
&\quad\cdot(a^\dagger a+b^\dagger b)\Big]:\exp\left(-\frac{rs'^*+r's}{s'^*s^*+r'r^*}ba\right)。
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

令

$$s''=ss'+rr'^*,\quad r''=rs'^*+r's,\tag{3.57}$$

可见$|s''|^2-|r''|^2=1$，于是

$$
\begin{aligned}
U_2(r,s)U_2(r',s')&=\exp\left(\frac{r''}{s''^*}b^\dagger a^\dagger\right):\exp\left[(a^\dagger a+b^\dagger b+1)\ln\frac{1}{s''^*}\right]:\\
&\quad\cdot\exp\left(-\frac{r''^*}{s''^*}ba\right)=U_2(r'',s'')。
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

由此得出结论：(3.53)式代表的双模压缩算符是辛群的一个严格

可靠表示。或可把(3.58)式写成

$$s''\int\frac{d^2z_1''d^2z_2''}{\pi^2}\mid s''z_1''+r''z_2''^*,r''z_1''^*+s''z_2''\rangle\langle z_1'',z_2''\mid$$

$$=ss'\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\mid sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2\rangle\langle z_1,z_2\mid$$

$$\cdot\int\frac{d^2z_1'd^2z_2'}{\pi^2}\mid s'z_1'+r'z_2'^*,r'z_1'^*+s'z_2'\rangle\langle z_1',z_2'\mid。\tag{3.59}$$

它是(3.39)式中反映的矩阵乘法的一个映射。

作为(3.53)式的一个应用，读者可以较方便地计算出双模压缩粒子态的显示形式 $U_2(r,s)|m,n\rangle$，并研究其性质。有兴趣的读者还可以思考如何将以上讨论推广到求 $2n$ 模压缩算符的相干态投影算符表示。以上两节的讨论，说明尽管相干态是不正交的，但由于(3.38)式和(3.59)式中的变换是辛变换，乘法规则仍然成立。

3.6　广义菲涅耳变换与广义菲涅耳算符——单模情形

在3.4节中已看到三参数压缩算符的乘法规则是辛群乘法规则的量子对应，本节中要指出(3.35)式中的三参数压缩算符 $U(r,s)$ 与波像光学的菲涅耳变换密切相关，$U(r,s)$ 实际上可以称为是广义菲涅耳算符，它是前者的量子力学对应。为了说明这一点，回忆波像光学(或称为傅里叶光学)中菲涅耳变换的定义，它把 $f(x_1)$ 变为 $g(x_2)$：

$$g(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(A,B,C,D;x_2,x_1)f(x_1)dx_1,\tag{3.60}$$

式中

$$\mathcal{K}=\frac{1}{\sqrt{2\pi iB}}\exp\left[\frac{i}{2B}(Ax_1^2-2x_2x_1+Dx_2^2)\right]\tag{3.61}$$

是变换核，实参数 A,B,C 和 D 满足关系 $AD-BC=1$。以下要证

明此变换核恰巧是$U(r,s)$在坐标表象中的矩阵元：

$$\mathscr{K}=\langle x_2 \mid U(r,s) \mid x_1\rangle, \tag{3.62}$$

式中

$$r=-\frac{1}{2}[A-D+\mathrm{i}(B+C)],$$
$$s=\frac{1}{2}[A+D-i(B-C)], \tag{3.63}$$
$$|s|^2-|r|^2=1。$$

(3.62)式与(3.47)式自洽。其证明如下：由$U(r,s)$的正规乘积式可知，在相干态表象中：

$$\langle z \mid U(r,s) \mid z'\rangle=\frac{1}{\sqrt{s^*}}\exp\left(-\frac{r}{2s^*}z^{*2}\right)\exp\left[\left(\frac{1}{s^*}-1\right)z^*z'\right]$$
$$\cdot\exp\left(\frac{r^*}{2s^*}z'^2\right)\langle z \mid z'\rangle。 \tag{3.64}$$

用坐标本征态与相干态的内积：

$$\langle x \mid z\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xz-\frac{z^2}{2}-\frac{|z|^2}{2}\right), \tag{3.65}$$

以及相干态的完备性，可计算

$$\begin{aligned}\langle x_2 \mid U(r,s) \mid x_1\rangle&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle x_2 \mid z\rangle\langle z \mid U(r,s)\int\frac{\mathrm{d}^2z'}{\pi}\mid z'\rangle\langle z' \mid x_1\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{s^*}}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2z'}{\pi}\exp\Big(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\sqrt{2}x_2z\\&\quad+\sqrt{2}x_1z'^*-|z|^2-|z'|^2-\frac{r}{2s^*}z^{*2}\\&\quad+\frac{r^*}{2s^*}z'^2+\frac{1}{s^*}z^*z'-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z'^{*2}\Big)\\&=\sqrt{\frac{1}{s^*-s+r^*-r}}\exp\Big\{\frac{1}{s^*-s+r^*-r}\\&\quad\cdot\left[2x_1x_2+(r^*-s)x_1^2-\frac{x_2^2}{s^*-r}\right]-\frac{rx_2^2}{s^*-r}-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\Big\}。\end{aligned} \tag{3.66}$$

引入

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(s-r+s^*-r^*), \\ B &= \frac{\mathrm{i}}{2}(s+r-s^*-r^*), \\ C &= -\frac{\mathrm{i}}{2}(s-r-s^*+r^*), \\ D &= \frac{1}{2}(s+r+s^*+r^*), \end{aligned} \tag{3.67}$$

恰好有 $AD-BC=1$，于是(3.66)式正好变为广义菲涅耳变换的核，

$$\langle x_2 \mid U(r,s) \mid x_1 \rangle = \mathcal{K}(A,B,C,D;x_2,x_1)。 \tag{3.68}$$

所以称 $U(r,s)$ 为广义菲涅耳算符。由(3.68)式又可知，只要当

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$$

成立时，

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(A'',B'',C'',D'';x_2,x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3 \langle x_2 \mid U(r,s) \mid x_3 \rangle \langle x_3 \mid U(r',s') \mid x_1 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3 \mathcal{K}(A,B,C,D;x_2,x_3) \\ &\quad \cdot \mathcal{K}(A',B',C',D';x_3,x_1)。 \end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.69)式表明两次广义菲涅耳变换的乘积仍是一个广义菲涅耳变换，这是广义菲涅耳算符的成群性决定的。

3.7 广义菲涅耳算符的坐标-动量算符表示[36]

可以证明广义菲涅耳算符 $U(r,s)$ 的另一表示为

$$\begin{aligned} U(r,s) \equiv U(A,B,C) &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}X^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(XP+PX)\ln A\right] \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}P^2\right), \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$AC - BD = 1。$$

式中 X,P 分别是坐标、动量算符。由于

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\sigma}{2}(XP+PX)\right)|x\rangle = \exp\left(\frac{\sigma}{2}\right)\exp(-\mathrm{i}\sigma PX)|x\rangle$$
$$= \exp\left(\frac{\sigma}{2}\right)\exp\left(\sigma x\frac{\partial}{\partial x}\right)|x\rangle$$
$$= \sqrt{A}\,|Ax\rangle, \tag{3.71}$$

式中 $A \equiv \mathrm{e}^{\sigma}$。所以

$$\langle x|U(r,s)|p\rangle = \exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}x^2\right)\langle x|\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(XP+PX)\ln A\right]|p\rangle \cdot \exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}p^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}x^2 - \frac{\mathrm{i}B}{2A}p^2\right)\langle x|\frac{p}{A}\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi A}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}x^2 - \frac{\mathrm{i}B}{2A}p^2\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}px}{A}\right)。\tag{3.72}$$

由此导出

$$\langle x|U(r,s)|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\langle x|U(r,s)|p'\rangle\langle p'|x'\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}B}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(Ax'^2 - 2xx' + Dx^2)\right]。\tag{3.73}$$

这正好是广义菲涅耳变换的核。进一步，从(3.70)式又得

$$U(r,s) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}X^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{A}}|\frac{p}{A}\rangle\langle p|\exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}p^2\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi A}}|x\rangle\langle p|\exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}x^2 - \frac{\mathrm{i}B}{2A}p^2 + \mathrm{i}\frac{px}{A}\right)。\tag{3.74}$$

于是

$$U(A',B',C')U(A,B,C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A'}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\,|x'\rangle\langle p'|$$

$$\cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2A'}(C'x'^2 - B'p'^2 + 2p'x')\right]$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi A}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p \mid x\rangle\langle p \mid$$

$$\cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2A}(Cx^2 - Bp^2 + 2px)\right]$$

$$= U(A'',B'',C'')。\tag{3.75}$$

则有

$$\langle x_3 \mid U(A'',B'',C'') \mid x_1\rangle = \langle x_3 \mid U(A',B',C')\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_2 \cdot \mid x_2\rangle\langle x_2 \mid U(A,B,C) \mid x_1\rangle。\tag{3.76}$$

这正好体现了广义菲涅耳变换的迭次变换之积。

3.8 用广义菲涅耳变换讨论标度定律

菲涅耳变换(最早称为菲涅耳积分)可以用来描述波矢为 k 的光束在傍轴近似下沿 z 轴的传播，设 $f(x_2,z)$为光场在 z 处的成像函数：

$$f(x_2,z) \equiv \sqrt{\frac{k}{\mathrm{i}2\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1 f_0(x_1)\exp\left[\frac{\mathrm{i}k(x_2-x_1)^2}{2z}\right],\tag{3.77}$$

它是惠更斯原理的数学表达式。令(3.61)式中的 A,B,C 参数皆是光轴坐标点 z 的函数，则由(3.60)式可知，对物 $f(x_1)$的标度进行变换，使广义菲涅耳公式变为

$$[R^{G(z_1)}f(\lambda x_1)](x_2) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}B(z_1)\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1 f(x_1) \cdot \exp\left\{\frac{\mathrm{i}[A(z_1)x_1^2 - 2x_1x_2\lambda + D(z_1)x_2^2\lambda^2]}{2B(z_1)\lambda^2}\right\},\tag{3.78}$$

式中$R^{G(z_1)}$的意思是与在坐标点z_1的G矩阵对应的广义菲涅耳变换。当条件

$$\frac{A(z_1)B(z_2)}{A(z_2)B(z_1)} = \lambda^2 \tag{3.79}$$

成立时，有

$$[R^{G(z_1)} f(\lambda x_1)](x_2) = \sqrt{\frac{B(z_2)}{\lambda^2 B(z_1)}}[R^{G(z_2)} f(x_1)]\left[\frac{B(z_2)}{B(z_1)\lambda} x_2\right] \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}x_2^2}{2}\left(\frac{D(z_1)}{B(z_1)} - \frac{D(z_2)B(z_2)}{B(z_1)\lambda^2}\right)\right]。 \tag{3.80}$$

上式说明：光照于经过标度变换以后的物，在$z=z_1$处的成像函数（是x_2的函数）与先前在$z=z_2$处的成像函数（是x_2乘以一个标度因子$\frac{B(z_2)}{\lambda B(z_1)}$后的函数）相似，其条件就是(3.79)式。

证明：首先取$f(x)$的标度变换是$f(x_1)\to f(\lambda x_1)$，即取

$$G \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \equiv s, \tag{3.81}$$

则菲涅耳变换是

$$\begin{aligned}[R^s f(x_1)](x_2) &= \lim_{B\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i} B}} \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}\left(\frac{1}{\lambda}x_1^2 - 2x_2x_1 + x_2^2\lambda\right)\right] f(x_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \delta\left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}x_2\right) f(x_1) = \sqrt{\lambda} f(x_2\lambda),\end{aligned} \tag{3.82}$$

式中用了

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon}\right)。 \tag{3.83}$$

现在设想把标度变换(3.81)式本身看作是第一次广义菲涅耳变

换,再把光波在以($ABCD$)表征的介质中传播的菲涅耳变换看作是第二次变换,就可以利用菲涅耳变换群乘法性质来研究输出场,即可把

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{A}{\lambda} & \lambda B \\ \frac{C}{\lambda} & \lambda D \end{pmatrix}\equiv G' \tag{3.84}$$

看作是新的广义菲涅耳变换参数矩阵。当在

$$\begin{aligned}[R^G f(\lambda x_1)](x_2) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\{R^G[R^s f(x_1)]\}(x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\ \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i}\lambda B}}\exp\Big[\frac{\mathrm{i}}{2\lambda^2 B}(Ax_1^2 \\ &\quad - 2x_1x_2\lambda+\lambda^2 Dx_2^2)\Big]f(x_1)\end{aligned} \tag{3.85}$$

之中写$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A(z_1) & B(z_1) \\ C(z_1) & D(z_1) \end{pmatrix}$为与 z_1 有关的参数群,则由群性质可知,若想把上述菲涅耳变换去等价于另外一个菲涅耳变换(用 $G(z_2)$表征),即将

$$G(z_2)=\begin{pmatrix} A(z_2) & B(z_2) \\ C(z_2) & D(z_2) \end{pmatrix}$$

作用于原始的(未受标度变换过的)客体,而其输出场成像在 z_2 处,且像要乘一个标度因子$\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$,即要求

$$\begin{aligned}G'(z_1) &= \begin{pmatrix} \frac{A(z_1)}{\lambda} & \lambda B(z_1) \\ \frac{C(z_1)}{\lambda} & \lambda D(z_1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(z_2) & B(z_2) \\ C(z_2) & D(z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{A(z_2)}{\nu} & \frac{B(z_2)}{\nu} \\ \nu C(z_2) & \nu D(z_2) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.86}$$

成立。由此导出

$$\frac{C(z_2)}{C(z_1)}=\frac{B(z_1)}{B(z_2)}=\frac{A(z_1)}{\lambda^2 A(z_2)}=\frac{D(z_2)}{\lambda^2 D(z_1)}, \tag{3.87}$$

可见

$$\nu=\frac{B(z_2)}{B(z_1)\lambda}。$$

(3.87)式即前已给出的(3.79)式，而整个等价过程可以写为

$$\begin{aligned}[R^G f(\lambda x_1)](x_2)&=\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}[R^{G'}f(x_1)](\nu x_2)\\&=\sqrt{\frac{B(z_2)}{\lambda^2 B(z_1)}}[R^{G'}f(x_1)](\nu x_2)。\end{aligned} \tag{3.88}$$

这称为标度定律。注意，当把上例推广到二维成像情况，则(3.88)式中右边的系数变为$\frac{B(z_2)}{\lambda^2 B(z_1)}$。

以上利用相干态表象给出了广义菲涅耳算符的乘法规则，它自然地导致两次菲涅耳变换的群乘法，光学成像的标度定律也就容易导出了。本节最后提及：用费米子相干态的性质可以导出费米压缩算符的成群性质，请参见文献[152]。

3.9　广义菲涅耳变换与广义菲涅耳算符——纠缠形式

在3.4节中对(3.54)式取$U_2(r,s)$的相干态矩阵元，得到

$$\begin{aligned}\langle z_1',z_2'|U_2(r,s)|z_1,z_2\rangle=&\frac{1}{s^*}\exp\Big[\frac{r}{s^*}z_1'^*z_2'^*-\frac{r^*}{s^*}z_1z_2\\&+\frac{1}{s^*}(z_1'^*z_1+z_2'^*z_2)-\frac{1}{2}(|z_1|^2\\&+|z_2|^2+|z_1'|^2+|z_2'|^2)\Big]。\end{aligned} \tag{3.89}$$

继续求$U_2(r,s)$在纠缠态$|\eta\rangle$表象中的矩阵元：

$$
\begin{aligned}
&\langle \eta' \equiv \sigma \mid U_2(r,s) \mid \eta \rangle \\
&= \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_1' d^2 z_2'}{\pi^4} \langle \sigma \mid z_1', z_2' \rangle \\
&\quad \cdot \langle z_1', z_2' \mid U_2(r,s) \mid z_1, z_2 \rangle \langle z_1, z_2 \mid \eta \rangle \\
&= \frac{1}{s^*} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_1' d^2 z_2'}{\pi^4} \exp\Big[-(|z_1|^2 + |z_2|^2 \\
&\quad + |z_1'|^2 + |z_2'|^2) - \frac{1}{2}(|\sigma|^2 + |\eta|^2) \Big] \\
&\quad \cdot \exp\Big[\frac{r^*}{s^*} z_1 z_2 + z_1^* z_2^* + \eta z_1^* + \frac{1}{s^*} z_1'^* z_1 + \frac{1}{s^*} z_2'^* z_2 \\
&\quad - \frac{r}{s^*} z_1'^* z_2'^* + z_1' z_2' + \sigma^* z_1' - \eta^* z_2^* - \sigma z_2' \Big] \\
&= \frac{1}{r - s - r^* + s^*} \exp\Big[\frac{(r-s)|\sigma|^2 - (r^* + s)|\eta|^2 + \eta\sigma^* + \eta^*\sigma}{r - s - r^* + s^*} \\
&\quad - \frac{1}{2}(|\sigma|^2 + |\eta|^2) \Big]。
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

若令

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}[A + D - i(B - C)], \\
r &= \frac{1}{2}[A - D + i(B + C)],
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

注意(3.91)式与(3.63)式中的r取法不同，则(3.90)式简化为

$$
\begin{aligned}
&\langle \sigma \mid U(G) \mid \eta \rangle = \frac{1}{2iB} \exp\left\{ \frac{i}{2B} [A|\eta|^2 + D|\sigma|^2 - (\eta\sigma^* + \eta^*\sigma)] \right\}, \\
&\qquad G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}。
\end{aligned} \tag{3.92}
$$

这是一种广义的二维菲涅耳变换核。由于$U_2(r,s)$已被证明具有群乘法的性质，因此此新变换也具有累次连续可变换的性质，即由连续两次变换(3.92)式所造成的结果与一次变换$\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$的相

同，式中$\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$。为了进一步看出变换(3.92)式与两个单模的广义菲涅耳变换的区别，以下要计算$U_2(r,s)$在双模坐标表象的矩阵元。为此，用第二章中$|\eta\rangle$的Schmidt分解式(2.11)得

$$\langle \eta = \eta_1 + i\eta_2 | x_1, x_2\rangle = \exp(i\eta_1\eta_2)\delta(\sqrt{2}\eta_1 + x_2 - x_1) \cdot \exp(-i\sqrt{2}\eta_2 x_1), \tag{3.93}$$

$$\langle x_1', x_2' | \sigma\rangle = \exp(-i\sigma_2\sigma_1)\delta(\sqrt{2}\sigma_1 + x_2' - x_1') \cdot \exp(i\sqrt{2}\sigma_2 x_1'), \tag{3.94}$$

式中$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$。于是(3.90)式得

$$\begin{aligned}\langle x_1', x_2' | U_2(r,s) | x_1, x_2\rangle &= \int \frac{d^2\sigma d^2\eta}{\pi^2}\langle x_1', x_2' | \sigma\rangle \\ &\quad \cdot \langle\sigma | U_2(r,s) | \eta\rangle\langle\eta | x_1, x_2\rangle \\ &= \frac{1}{4iB\pi^2}\int \frac{d\sigma_2 d\eta_2}{\pi^2}\exp\Big[i\sigma_2\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad - i\eta_2\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{2B}(A\eta_2^2 + D\sigma_2^2 \\ &\quad - 2\eta_2\sigma_2)\Big]\exp\Big\{\frac{i}{2B}\Big[\frac{A}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &\quad + \frac{D}{2}(x_1' - x_2')^2 - (x_1 - x_2) \\ &\quad \cdot (x_1' - x_2')\Big]\Big\}。\end{aligned} \tag{3.95}$$

经过积分整理后化为

$$\begin{aligned}\langle x_1', x_2' | U_2(r,s) | x_1, x_2\rangle &= \frac{1}{2\pi\sqrt{BC}}\exp\Big\{\frac{i}{4B}[A(x_1 - x_2)^2 \\ &\quad + D(x_1' - x_2')^2 - 2(x_1 - x_2)(x_1' - x_2')]\Big\} \\ &\quad \cdot \exp\Big\{-\frac{i}{4C}[A(x_1' + x_2')^2 + D(x_1 + x_2)^2\end{aligned}$$

$$-2(x_1'+x_2')(x_1+x_2)]\Big\}。\tag{3.96}$$

这就是纠缠形式的广义菲涅耳变换的核。这个形式在以往有关光学菲涅耳变换的文献中尚未见报道。可见用双模广义菲涅耳算符的坐标表象矩阵元可以导出新的菲涅耳变换的形式。以上的讨论表明用量子光学的理论可以研究并发展经典光学的各种变换，详见笔者最近的一篇评论性文章[37]。

3.10 压缩参数空间中压缩态完备性的讨论

用有序算符内的积分技术和(1.34)式，可以证明单模平移压缩态

$$D(\alpha)S_1(\lambda)\mid 0\rangle = D(\alpha)\exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)\mid 0\rangle\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\lambda \tag{3.97}$$

在平移参数空间 α 中是完备的，即

$$\int\frac{d^2\alpha}{\pi}D(\alpha)S_1(\lambda)\mid 0\rangle\langle 0\mid S_1^{\dagger}(\lambda)D^{\dagger}(\alpha) = 1。\tag{3.98}$$

那么压缩态在压缩参数 λ 的空间中是否是完备的呢？为了探讨这一问题，引入复压缩参数 $\xi=|\xi|e^{i\varphi}$。单模压缩算符是

$$s(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi a^{\dagger 2}-\xi^* a^2)\right]。\tag{3.99}$$

用 $s(\xi)$作用于真空态$|0\rangle$与单粒子态$|1\rangle$，可得

$$s(\xi)\mid 0\rangle = (1-f)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\frac{a^{\dagger 2}}{2}\sqrt{f}e^{i\varphi}\right)\mid 0\rangle \equiv \mid f,\varphi\rangle_0,\tag{3.100}$$

$$s(\xi)\mid 1\rangle = (1-f)^{\frac{3}{4}}\exp\left(\frac{a^{\dagger 2}}{2}\sqrt{f}e^{i\varphi}\right)\mid 1\rangle \equiv \mid f,\varphi\rangle_1,\tag{3.101}$$

式中

$$\sqrt{f} = \tanh\mid\xi\mid,\ \operatorname{sech}\mid\xi\mid = \sqrt{1-f},\ 0\leqslant f\leqslant 1。\tag{3.102}$$

用有序算符内积分技术，可证

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}f}{(1-f)^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,|\,f,\varphi\rangle_{11}\langle f,\varphi\,| = \sum_{n=0}^{\infty}|\,2n+1\rangle\langle 2n+1\,|,$$

$$|\,2n+1\rangle = \frac{a^{\dagger\,2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}}\,|\,0\rangle, \tag{3.103}$$

即压缩单光子态的集合在压缩参数空间中相当于 Fock 空间中的奇子空间。(3.103)式的证明可分两步进行，第一步是

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,|\,f,\varphi\rangle_{11}\langle f,\varphi\,| = 2\pi(1-f)^{\frac{3}{2}}:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{f}{4}\right)^n(a^{\dagger}a)^{2n+1}}{(n!)^2}\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}:, \tag{3.104}$$

然后再用贝塔函数的积分公式

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 f^{p-1}(1-f)^{q-1}\mathrm{d}f \tag{3.105}$$

实现(3.103)式中的第二步积分。至于如何对 $|f,\varphi\rangle_0$ 实现相似的积分，请看文献[38]。

3.11　相干态与 Bargmann 空间

Bargmann 在 20 世纪 60 年代初建立了一个函数空间，后被称为 Bargmann 空间。设 $\langle z^*| = \langle 0|\mathrm{e}^{za}$ 是一个未归一化的相干态，则有

$$\langle z^*|a^{\dagger} = z\langle z^*|,\ \langle z^*|a = \frac{\partial}{\partial z}\langle z|, \tag{3.106}$$

即在 $\langle z^*|$ 表示下，$a^{\dagger}$ 的作用相当于乘 z，a 的作用相当于进行微商运算 $\frac{\partial}{\partial z}$，则粒子数算符 $N=a^{\dagger}a$ 的作用相当于 $z\frac{\partial}{\partial z}$，其本征方程

$$z\frac{\partial}{\partial z}\psi(z) = n\psi(z) \tag{3.107}$$

具有解 $\psi(z)=z^n$，它对应于粒子态，即

$$\frac{z^n}{\sqrt{n!}} = \langle z^* | n \rangle \to | n \rangle。\tag{3.108}$$

称$\frac{z^n}{\sqrt{n!}}$为 Bargmann 空间的基函数[39]，它满足正交性条件

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(-|z|^2) = n! \delta_{m,n}。\tag{3.109}$$

由此可以引入 Bargmann 变换，令其相应的变换核是

$$\langle x | z \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + \sqrt{2} zx - \frac{x^2}{2}\right) \equiv A(z,x),\tag{3.110}$$

式中$\langle x |$是坐标本征态，见(1.16)式。Bargmann 变换式是

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx A(z,x) \psi(x)。\tag{3.111}$$

例如，粒子态波函数

$$\psi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{H}_n(x),\tag{3.112}$$

式中 $\mathrm{H}_n(x)$是单模厄米特多项式，其 Bargmann 变换是

$$F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(x - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \mathrm{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n,\tag{3.113}$$

它与对应式(3.108)一致。由于

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^2 z}{\pi} A(z,x) A^*(z,x') \exp(-|z|^2) \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle x | z \rangle \langle z | x' \rangle \exp(-|z|^2) \\
&= \delta(x - x'),
\end{aligned}\tag{3.114}$$

可知逆 Bargmann 变换是

$$\psi(x) = \int \frac{d^2 z}{\pi} A^*(z,x) F(z) \exp(-|z|^2)。\tag{3.115}$$

从(3.111)式到(3.115)式可以看出

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} F^*(z) F'(z) \exp(-|z|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi'(x)。\tag{3.116}$$

一个明显的推广到双模情形是

$$\psi(x,y)=\int\frac{d^2z}{\pi}A^*(z,x)F(z)\int\frac{d^2z'}{\pi}A^*(z',y)F(z')\cdot\exp(-|z|^2-|z'|^2),\tag{3.117}$$

以及

$$|m,n\rangle=\frac{a^{\dagger m}b^{\dagger n}}{\sqrt{n!m!}}|0,0\rangle\rightarrow\frac{z^m z'^n}{\sqrt{m!n!}}。\tag{3.118}$$

3.12　广义 Bargmann 空间[40]

但是在双模情况下还可以有别的方案。这个方案是用双模厄米特多项式作为双模 Fock 态$|m,n\rangle$的广义 Bargmann 表示，它与(3.118)式是不同的。为此，先考察函数：

$$\begin{aligned}B(z,z';\zeta)&=\exp(-zz'+z\zeta+z'\zeta^*)\\&=\exp\left(-\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}+\alpha\zeta_1+\mathrm{i}\beta\zeta_2\right),\end{aligned}\tag{3.119}$$

式中 z,z'与 ζ 都是复数：

$$\begin{aligned}\alpha&=z+z'=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2,\\\beta&=z-z'=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2,\\d^2zd^2z'&=\frac{1}{4}d^2\alpha d^2\beta。\end{aligned}\tag{3.120}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\int d^2zd^2z'B(z,z';\zeta)B^*(z,z';\zeta')\exp(-|z|^2-|z'|^2)\\&=\frac{1}{4}\int d^2\alpha d^2\beta\exp\Big(-\frac{\alpha^2+\alpha^{*2}-\beta^2-\beta^{*2}}{4}+\alpha\zeta_1+\alpha^*\zeta_1'\\&\quad+\mathrm{i}\beta\zeta_2-\mathrm{i}\beta^*\zeta_2'-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}\Big)\\&=\pi^3\delta^{(2)}(\zeta-\zeta')\exp(|\zeta|^2)。\end{aligned}\tag{3.121}$$

比较(3.121)式与(3.114)式，可见 $B(z,z';\zeta)$起的作用与(3.114)

式中 $A(z,x)$ 的作用类似，所以有理由认定 $K(z,z';\zeta)$ 为归一化的广义 Bargmann 变换核：

$$K(z,z';\zeta)=B(z,z';\zeta)\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)。\quad(3.122)$$

$\psi(\zeta)$ 的广义 Bargmann 变换是

$$F(z,z')=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}K(z,z';\zeta)\psi(\zeta)。\quad(3.123)$$

由核的正交性：

$$\int\frac{d^2zd^2z'}{\pi^2}\exp(-|z|^2-|z'|^2)K(z,z';\zeta)K^*(z,z';\zeta')$$
$$=\pi\delta^{(2)}(\zeta-\zeta'),\quad(3.124)$$

可知广义 Bargmann 变换的逆变换是

$$\psi(\zeta)=\int\frac{d^2zd^2z'}{\pi^2}\exp(-|z^2|-|z'|^2)K^*(z,z';\zeta)F(z,z')。$$
$$(3.125)$$

从(3.123)式与(3.125)式，可以导出类似于傅里叶变换中的 Parseval 等式：

$$\int\frac{d^2zd^2z'}{\pi^2}F_1^*(z,z')F_2(z,z')\exp(-|z|^2-|z'|^2)$$
$$=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\psi_1^*(\zeta)\psi_2(\zeta),\quad(3.126)$$

它是(3.116)式的推广。如文献[17]那样引入双变数厄米特多项式：

$$H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)=\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!}(-1)^l\zeta^{m-l}\zeta^{*n-l},$$
$$(3.127)$$

(它不同于两个单变数厄米特多项式的乘积。)以及其母函数：

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{z^mz'^n}{m!n!}H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)=\exp(-zz'+z\zeta+z'\zeta^*)。\quad(3.128)$$

与(3.119)式比较，可见广义 Bargmann 变换的核可以展开为

$$K(z,z';\zeta)=\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{z^m z'^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\zeta^*),\tag{3.129}$$

把它代入(3.124)式，导出

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\zeta^*)[\mathrm{H}_{m,n}(\zeta',\zeta'^*)]^*\exp(-|\zeta|^2)$$
$$=\pi\delta^{(2)}(\zeta-\zeta')。\tag{3.130}$$

如果引入双变数厄米特多项式的积分表示：

$$(-1)^n e^{\xi\eta}\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}z^n z^{*m}\exp(-|z|^2+\xi z-\eta z^*)=\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta),\tag{3.131}$$

就可以证明

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\zeta^*)[\mathrm{H}_{m',n'}(\zeta,\zeta^*)]^*\exp(-|\zeta|^2)$$
$$=\sqrt{m!n!m'!n'!}\,\delta_{m',m}\delta_{n',n}。\tag{3.132}$$

以下求双模 Fock 态 $|m,n\rangle$ 所对应的广义 Bargmann 表示。由于 $|m,n\rangle$ 的普通 Bargmann 表示是 $\frac{z^m z'^n}{\sqrt{m!n!}}$，故由(3.125)式得

$$\psi(\zeta)=\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^2 z\mathrm{d}^2 z'}{\pi^2}\exp(-|z|^2-|z'|^2)$$
$$\cdot\sum_{m',n'=0}^{\infty}\frac{\frac{z^{*m'}z'^{*n'}}{m'!n'!}\mathrm{H}^*_{m',n'}(\zeta,\zeta^*)z^m z'^n}{\sqrt{m!n!}}$$
$$=\frac{\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\mathrm{H}^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*)}{\sqrt{m!n!}}。\tag{3.133}$$

这表明

$$|m,n\rangle\rightarrow\frac{z^m z'^n}{\sqrt{m!n!}}\rightarrow\frac{\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\mathrm{H}^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*)}{\sqrt{m!n!}}。\tag{3.134}$$

(3.133)式的逆变换可用(3.123)式及(3.122)式进行检验：

$$F(z,z')=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\exp(-zz'+z\zeta+z'\zeta^*-|\zeta|^2)\frac{H^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*)}{\sqrt{m!n!}}$$

$$=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\exp(-|\zeta|^2)\sum_{m',n'=0}^{\infty}\frac{\frac{z^{m'}z'^{n'}}{m'!n'!}H_{m',n'}(\zeta,\zeta^*)H^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*)}{\sqrt{m!n!}}$$

$$=\frac{z^m z'^n}{\sqrt{m!n!}}。\tag{3.135}$$

还可以通过以下态矢

$$\langle\zeta|=\langle 0,0|\exp\left(-ab+a\zeta^*+b\zeta-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\tag{3.136}$$

来检验(3.133)式。由双模相干态的完备性：

$$\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\exp(-|z_1|^2-|z_2|^2)|z_1,z_2\rangle\langle z_1,z_2|=1,\tag{3.137}$$

式中$|z_1,z_2\rangle$未归一化，以及

$$\langle\zeta|z_1,z_2\rangle=\exp\left(-z_1z_2+z_1\zeta^*+z_2\zeta-\frac{|\zeta|^2}{2}\right),\tag{3.138}$$

得到

$$\langle\zeta|m,n\rangle=\langle\zeta|\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\exp(-|z_1|^2-|z_2|^2)$$

$$\cdot|z_1,z_2\rangle\langle z_1,z_2|m,n\rangle$$

$$=\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\exp(-|z_1|^2-|z_2|^2$$

$$-z_1z_2+z_1\zeta^*+z_2\zeta)\frac{z_1^{*m}z_2^{*n}}{\sqrt{m!n!}}$$

$$=\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\frac{H^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*)}{\sqrt{m!n!}}。\tag{3.139}$$

由此看出$\langle\zeta|m,n\rangle$包括通常的 Bargmann 变换$\langle z_1,z_2|m,n\rangle$和广义 Bargmann 变换(上式第二行)；或者说$|m,n\rangle$的广义 Bargmann

表示就是 $H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)/\sqrt{m!\ n!}$。

还可以从未归一化的两粒子纠缠态

$$\langle\zeta\| = \langle 0,0 | \exp(-ab + a\zeta^* + b\zeta) \tag{3.140}$$

验证这一结果。由于

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\langle\zeta\| = \langle\zeta\| a,\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\langle\zeta\| = \langle\zeta\| b,\\ a \to \frac{\partial}{\partial\zeta^*},\ a^\dagger \to \zeta^* - \frac{\partial}{\partial\zeta},\ b \to \frac{\partial}{\partial\zeta},\ b^\dagger \to \zeta - \frac{\partial}{\partial\zeta^*},\end{gathered} \tag{3.141}$$

故有

$$\begin{aligned}\langle\zeta\| b^\dagger b | m,n\rangle &= \langle\zeta\| (\zeta - a)b | m,n\rangle \\ &= \left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\zeta^*}\right)\langle\zeta\| m,n\rangle \\ &= n\langle\zeta\| m,n\rangle,\end{aligned} \tag{3.142}$$

$$\begin{aligned}\langle\zeta\| a^\dagger a | m,n\rangle &= \langle\zeta\| (\zeta^* - b)a | m,n\rangle \\ &= \left(\zeta^*\frac{\partial}{\partial\zeta^*} - \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\zeta^*}\right)\langle\zeta\| m,n\rangle \\ &= m\langle\zeta\| m,n\rangle。\end{aligned} \tag{3.143}$$

由双模厄米特多项式的定义式(3.127)可知

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}H^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*) = mH^*_{m-1,n}(\zeta,\zeta^*),\\ \frac{\partial}{\partial\zeta}H^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*) = nH^*_{m,n-1}(\zeta,\zeta^*)。\end{gathered} \tag{3.144}$$

把$\langle\zeta\| m,n\rangle = H^*_{m,n}(\zeta,\zeta^*)/\sqrt{m!\ n!}$代入(3.142)式，并用(3.144)式，可导出

$$\begin{gathered}nH_{m,n-1}(\zeta,\zeta^*) + H_{m-1,n}(\zeta,\zeta^*) = \zeta H_{m,n}(\zeta,\zeta^*),\\ mH_{m-1,n}(\zeta,\zeta^*) + H_{m,n-1}(\zeta,\zeta^*) = \zeta^* H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)。\end{gathered} \tag{3.145}$$

这说明(3.139)式是正确的。

用广义 Bargmann 表示可以简化若干较繁复的计算，例如在量子光学中求正交分量算符(X_1+X_2)的 k 阶矩，就会遇到

$$\langle m,n | (X_1 + X_2)^k | m',n'\rangle$$

$$=\int\frac{d^2\zeta d^2\zeta'}{\pi^2}\langle m,n\mid\zeta'\rangle\cdot\langle\zeta'\mid(X_1+X_2)^k\mid\zeta\rangle\langle\zeta\mid m',n'\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m!n!m'!n'!}}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}(\sqrt{2}\zeta_1)^k$$

$$\cdot H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)H^*_{m',n'}(\zeta,\zeta^*)\exp(-|\zeta|^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m!n!m'!n'!}}\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m\partial z'^n}\frac{\partial^{m'+n'}}{\partial\tilde{z}^{*m'}\partial\tilde{z}'^{*n'}}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}(\sqrt{2}\zeta_1)^k$$

$$\cdot\exp(-zz'+z\zeta+z'\zeta^*-\tilde{z}^*\tilde{z}'^*+\tilde{z}^*\zeta^*$$

$$+\tilde{z}'^*\zeta-|\zeta|^2)\big|_{z=z'=\tilde{z}^*=\tilde{z}'^*=0}。\tag{3.146}$$

以上分析表明，正如相干态与 Bargmann 空间相协调那样，纠缠态也与广义 Bargmann 空间相融洽，与纠缠态对应的函数空间是以双模厄米特多项式为基的。

3.13 二维复小波变换与纠缠态表象[41]

第一章已讨论了如何从量子力学表象变换的角度来处理一维小波变换。在有了纠缠态表象后，可以进一步用量子论的观点来讨论二维复小波变换。由于小波变换涉及到被变换函数的标度变换，所以用量子力学处理复小波变换时肯定要用到双模压缩算符。第二章已指出它在纠缠态表象有自然、简洁的表示，这就是纠缠态表象的又一重要用途。对照一维情况下的局域波条件(1.43)式，以下提出复小波变换的情况，波函数 $\psi(\eta)$ 应该满足：

$$\int\frac{d^2\eta}{\pi}\psi(\eta)=0,\ \psi(\eta)=\langle\eta\mid\psi\rangle。\tag{3.147}$$

由于

$$\int\frac{d^2\eta}{\pi}\mid\eta\rangle=\exp(-a_1^\dagger a_2^\dagger)\mid 0,0\rangle=\mid\zeta=0\rangle,\tag{3.148}$$

故(3.147)式等价于

$$\langle\zeta=0\mid\psi\rangle=0,\tag{3.149}$$

这是一个很有用的表达式。不失一般，当取

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} k_{m,n} a_1^{\dagger n} a_2^{\dagger m} |0,0\rangle, \tag{3.150}$$

则用双模相干态的完备性，得

$$\begin{aligned}\langle \zeta = 0 | \psi\rangle &= \langle \zeta = 0 | \iint \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} |z_1 z_2\rangle\langle z_1 z_2| \\ &\quad \cdot \sum_{n,m=0}^{\infty} k_{n,m} a_1^{\dagger n} a_2^{\dagger m} |0,0\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} k_{n,m} \iint \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} z_1^n z_2^{*m} \exp(-|z_1|^2 \\ &\quad -|z_2|^2 - z_1 z_2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! k_{n,n} (-1)^n = 0,\end{aligned} \tag{3.151}$$

这就是$|\psi\rangle$为局域时$k_{n,n}$应该满足的条件。例如取$k_{0,0}=\frac{1}{2}$，$k_{1,1}=1$，则双模母小波为

$$|\psi\rangle_M = \frac{1}{2}(1 + a_1^{\dagger} a_2^{\dagger}) |0,0\rangle, \tag{3.152}$$

它有资格成为母小波。用双模厄米特多项式的母函数公式(2.43)，得

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathrm{H}_{m,n}(\eta,\eta^*) \frac{(-1)^n}{\sqrt{m!n!}} |m,n\rangle, \tag{3.153}$$

所以

$$\begin{aligned}\langle \eta | 1,1\rangle &= -\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2\right) \mathrm{H}_{1,1}^*(\eta,\eta^*) \\ &= -\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2\right)(|\eta|^2 - 1)。\end{aligned} \tag{3.154}$$

它也属于“墨西哥帽”小波，满足局域性条件(3.147)式。而前面定义的复小波变换是

$$W_\psi F(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int F(\eta) \psi^* \left(\frac{\eta - \sigma}{\mu}\right) \frac{d^2\eta}{\pi}。 \tag{3.155}$$

用$\langle\eta|$表象，上式可在量子力学框架中写为

$$W_\psi F(\mu,\sigma)=\frac{1}{\mu}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\langle\psi|\frac{\eta-\sigma}{\mu}\rangle\langle\eta|F\rangle=\langle\psi|U_2(\mu,\sigma)|F\rangle,\tag{3.156}$$

式中$\mu=\mathrm{e}^\lambda$，

$$\begin{aligned}U_2(\mu,\sigma)&=\frac{1}{\mu}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\frac{\eta-\sigma}{\mu}\rangle\langle\eta|\\&=\mathrm{sech}\lambda:\exp\Big[(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)\tanh\lambda\\&\quad+(\mathrm{sech}\lambda-1)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)\\&\quad-\frac{1}{2}\sigma a_1^\dagger\,\mathrm{sech}\lambda+\frac{1}{2}\sigma^*a_2^\dagger\,\mathrm{sech}\lambda\\&\quad+\frac{1}{1+\mu^2}(\sigma^*a_1-\sigma a_2)-\frac{|\sigma|^2}{1+\mu^2}\Big]:。\end{aligned}\tag{3.157}$$

(3.157)式是复小波变换的量子力学表述，有了它，对于不同的$|F\rangle$，就可以计算其相对于$\langle\psi|$的小波变换了。

3.14　纠缠态表象的微分型完备关系及应用[42]

作为广义Bargmann空间的一个应用，纠缠态存在着一种微分型完备性关系：

$$2\left|2\frac{\partial}{\partial\zeta^*},-2\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle\langle\eta=\zeta,\eta^*=\zeta^*|\Big|_{\zeta=0}=1。\tag{3.158}$$

上式右矢属于$|\zeta\rangle\equiv|\zeta,\zeta^*\rangle$一类型的态（见(2.139)式），但让其宗量换成微商运算，即$\zeta\to2\frac{\partial}{\partial\zeta^*}$，$\zeta^*\to-2\frac{\partial}{\partial\zeta}$，左矢为$\langle\eta|\equiv\langle\eta,\eta^*|$类型的态，其宗量$\eta=\zeta$，而$|_{\zeta=0}$意指当(3.158)式中的微商完成后，使$\zeta=0$。

(3.158)式的证明如下：用双变数厄米特多项式的性质及其母函数公式（见(3.128)式），可将纠缠态$|\eta\rangle$与$\langle\zeta|$分别展开为

$$|\eta\rangle=\exp(-a_1^\dagger a_2^\dagger)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{m,n}(\sqrt{2}a_1^\dagger,\sqrt{2}a_2^\dagger)}{m!n!}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)^m\left(\frac{\eta^*}{\sqrt{2}}\right)^n|0,0\rangle,\tag{3.159}$$

$$|\zeta\rangle=\langle 0,0|\exp(a_1a_2)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}\sqrt{2}a_1,\mathrm{i}\sqrt{2}a_2)}{m!n!}\left(\frac{-\mathrm{i}\zeta^*}{\sqrt{2}}\right)^m\left(\frac{\mathrm{i}\zeta}{\sqrt{2}}\right)^n。\tag{3.160}$$

代入(3.158)式并用有序算符内的微分技术，得

$$\begin{aligned}&\left|2\frac{\partial}{\partial\zeta^*},-2\frac{\partial}{\partial\zeta}\right\rangle\langle\eta=\zeta|\Big|_{\zeta=0}\\&=:\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{m,n}(\sqrt{2}a_1^\dagger,\sqrt{2}a_2^\dagger)}{m!n!}\left(\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\right)^m\left(-\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n\\&\cdot\sum_{m',n'=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{m',n'}(\mathrm{i}\sqrt{2}a_1,\mathrm{i}\sqrt{2}a_2)}{m'!n'!}\left(\frac{-\mathrm{i}\zeta^*}{\sqrt{2}}\right)^{m'}\left(\frac{\mathrm{i}\zeta}{\sqrt{2}}\right)^{n'}\mathrm{e}^W:\Big|_{\zeta=0}\\&=:\mathrm{e}^W\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{m,n}(\sqrt{2}a_1^\dagger,\sqrt{2}a_2^\dagger)\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}\sqrt{2}a_1,\mathrm{i}\sqrt{2}a_2)}{m!n!}(-\mathrm{i})^{m+n}:,\end{aligned}\tag{3.161}$$

式中 $W=a_1a_2-a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2$。再用两个双变数厄米特多项式的积的母函数公式：

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n}^{\infty}\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}\xi,\mathrm{i}\eta)\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}\rho,\mathrm{i}\kappa)\frac{t^ns^m}{n!m!}\\&=\exp(-\xi\eta)(1-ts)^{-1}\exp[(1-ts)^{-1}(\xi\eta-t\kappa\eta-s\xi\rho+ts\kappa\rho)],\end{aligned}\tag{3.162}$$

在(3.162)式中进行以下替换 $\xi\rightarrow-\mathrm{i}\sqrt{2}a_1^\dagger$，$\eta\rightarrow-\mathrm{i}\sqrt{2}a_2^\dagger$，$\rho\rightarrow\sqrt{2}a_1$，$\kappa\rightarrow\sqrt{2}a_2$，就可以看出(3.161)式能化为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}:\mathrm{e}^W\exp(2a_1^\dagger a_2^\dagger)\exp\left[\frac{1}{2}(-2a_1^\dagger a_2^\dagger+2a_2^\dagger a_2+2a_1^\dagger a_1-2a_1a_2)\right]:\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}\tag{3.163}$$

于是(3.158)式得证。

作为(3.158)式的应用，考虑到

$$\langle \eta | \eta = \langle \eta | (a_1 - a_2^\dagger), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \langle \eta | = \langle \eta | - \frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_2), \tag{3.164}$$

从恒等式

$$\exp\left(\lambda \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta}\right) f(\eta) = \exp\left(\lambda \frac{\partial}{\partial \tau}\right) f\left(\eta \equiv \frac{1}{\tau}\right)$$
$$= f\left(\frac{1}{\tau - \lambda}\right) = f\left(\frac{\eta}{1 - \lambda\eta}\right), \tag{3.165}$$

式中 $\lambda \neq \frac{1}{\eta}$，所以

$$\exp\left(\lambda \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \lambda^* \eta^{*2} \frac{\partial}{\partial \eta^*}\right) f(\eta, \eta^*) = f\left(\frac{\eta}{1 - \lambda\eta}, \frac{\eta^*}{1 - \lambda^* \eta^*}\right), \tag{3.166}$$

可见

$$\langle \eta | \exp(\lambda A^2 B - \lambda^* A^{\dagger 2} B^\dagger) = \exp\left(\lambda \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \lambda^* \eta^{*2} \frac{\partial}{\partial \eta^*}\right) \langle \eta |$$
$$= \left\langle \frac{\eta}{1 - \lambda\eta} \right|, \tag{3.167}$$

式中

$$A = a_1 - a_2^\dagger, \quad B = -\frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_2)。 \tag{3.168}$$

于是，由(3.128)式和(3.167)式得

$$\exp(\lambda A^2 B - \lambda^* A^{\dagger 2} B^\dagger) = 2 \left| 2\frac{\partial}{\partial \zeta^*}, -2\frac{\partial}{\partial \zeta} \right\rangle \left\langle \frac{\zeta}{1 - \lambda\zeta}, \frac{\zeta^*}{1 - \lambda^* \zeta^*} \right| \Bigg|_{\zeta=0}。 \tag{3.169}$$

然后用正规乘积内的微分技术，就可以求出上式的正规乘积展开。

3.15 玻色产生算符本征态[43]、[44]

大家都熟悉相干态是玻色子湮灭算符的本征右矢。至于产生

算符 $a^\dagger$ 有没有本征右矢，有两种回答。一是 $a^\dagger$ 的本征右矢恒为零；二是 $a^\dagger$ 不具有归一化的本征态，持这一观点的解释见于文献[45]。但这只是知其一而不知其二的观点。事实上以下将证明 $a^\dagger$ 具有不能归一化的右手本征矢，尽管它不能在物理仪器及实验中实现，但有一些辅助的用处，因此有必要求出其显示形式。

令 $|z\rangle_*$ 是 $a^\dagger$ 的本征值为 z 的本征右矢：

$$a^\dagger \mid z\rangle_* = z \mid z\rangle_*, \tag{3.170}$$

式中下标 $*$ 表示其附属的态属于 $a^\dagger$ 的右矢。在坐标表象 $\langle x|$ 中建立方程

$$z\langle x \mid z\rangle_* = \langle x \mid a^\dagger \mid z\rangle_* = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x \mid (\hat{X} - \mathrm{i}\hat{P}) \mid z\rangle_*$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x \mid z\rangle_*, \tag{3.171}$$

这导致解为

$$\langle x \mid z\rangle_* \propto \exp\left(\frac{x^2}{2} - \sqrt{2}xz\right), \tag{3.172}$$

显然它是发散的。如果换用以下的陈述，即在 Fock 空间中展开 $|z\rangle_*$：

$$\mid z\rangle_* = \sum_{n=0}^{\infty} \mid n\rangle\langle n \mid z\rangle_*, \tag{3.173}$$

则由递推关系 $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$，得

$$0 = z\langle 0 \mid z\rangle_*, \langle 0 \mid z\rangle_* = z\langle 1 \mid z\rangle_*, \sqrt{2}\langle 1 \mid z\rangle_* = z\langle 2 \mid z\rangle_*, \cdots$$

$$\sqrt{n}\langle n \mid z\rangle_* = z\langle n \mid z\rangle_*, n = 1,2,3,\cdots \tag{3.174}$$

分析这些递推关系可见：当 $z\neq 0$ 时，所有的系数 $\langle n|z\rangle_*$ 为零。当 $z=0$ 时，必须十分小心，否则将得到不严格的结果。把方程 $0=z\langle 0|z\rangle_*$ 与 $x\delta(x)=0$ 比较，能从递推关系可以导出

$$\langle 0 \mid z\rangle_* = \delta(z),\ \langle 0 \mid z\rangle_* = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\langle n \mid z\rangle_*, \tag{3.175}$$

式中 $\delta(z)$ 是广义函数，它的作用是

$$\int_c \mathrm{d}z\delta^{(n)}(z-z')\varphi(z)=(-1)^n\varphi^{(n)}(z'),$$

而 $a^\dagger$ 的本征态为

$$|z\rangle_*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\delta^{(n)}(z)|n\rangle=\exp\left(-a^\dagger\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta(z)|0\rangle,\tag{3.176}$$

式中 $\delta^{(n)}(z)$是 $\delta(z)$的 n 阶导数,具有以下性质:

$$z^l\delta^{(n)}(z)=(-1)^l\frac{n!}{(n-l)!}\delta^{(n-l)}(z)。\tag{3.177}$$

$|z\rangle_*$的性质主要有

$$\langle z|z'\rangle_*=\delta(z-z'),\tag{3.178}$$

式中左矢$\langle z|$是未归一化的相干态,$\langle z|=\langle 0|\mathrm{e}^{za}$,以及

$$\begin{aligned}\int_c \mathrm{d}z|z\rangle_*\langle z|&=\int_c \mathrm{d}z\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^m\delta^{(n)}(z)}{\sqrt{m!n!}}|m\rangle\langle n|\\&=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1,\end{aligned}\tag{3.179}$$

这就是产生算符本征态与相干态所组成的围道积分完备性。

3.16 产生算符的本征态作为一个不可归一化的超奇异的压缩相干态

还可以从压缩相干态的角度来讨论 $a^\dagger$ 的本征右矢量。引入 $a+\zeta a^\dagger$ 的本征矢方程:

$$(a+\zeta a^\dagger)|\alpha,\zeta\rangle=\alpha|\alpha,\zeta\rangle,\tag{3.180}$$

式中 ζ 和 α 皆为复数。不难导出$|\alpha,\zeta\rangle$是一个压缩相干态,

$$|\alpha,\zeta\rangle=\exp\left(\alpha a^\dagger-\frac{\zeta}{2}a^{\dagger 2}\right)|0\rangle。\tag{3.181}$$

实际上它可以由以下算符恒等式看出,

$$\exp\left(-\alpha a^\dagger+\frac{\zeta}{2}a^{\dagger 2}\right)(a+\zeta a^\dagger)\exp\left(\alpha a^\dagger-\frac{\zeta}{2}a^{\dagger 2}\right)=a+\alpha I,\tag{3.182}$$

式中 I 是恒等算符,用厄米特多项式可以把 $|\alpha,\zeta\rangle$ 展开为

$$|\alpha,\zeta\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2\zeta})^n}{2^n\sqrt{n!}}\mathrm{H}_n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\zeta}}\right)|n\rangle,\tag{3.183}$$

再用母函数公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right],\tag{3.184}$$

式中 $|t|^2<1$,可得

$$\langle\alpha',\zeta'|\alpha,\zeta\rangle=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta\zeta'}}\exp\left[\frac{2\alpha\alpha'-(\zeta'\alpha^2+\zeta\alpha'^2)}{2(1-\zeta\zeta')}\right],$$

$$|\xi||\xi'|<1。\tag{3.185}$$

上式也可直接用 IWOP 技术导出。若把本征矢方程(3.180)改写为

$$\left(\frac{1}{\zeta}a+a^{\dagger}\right)\sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}}\exp\left[-\frac{\zeta}{2}(zI-a^{\dagger})^2\right]|0\rangle$$

$$=z\sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}}\exp\left[-\frac{\zeta}{2}(zI-a^{\dagger})^2\right]|0\rangle,\tag{3.186}$$

在 $\zeta\to\infty$ 时导致

$$a^{\dagger}|z\rangle_*=z|z\rangle_*,\tag{3.187}$$

上式中 $|z\rangle_*$ 的定义是

$$\begin{aligned}|z\rangle_*&\equiv\lim_{\zeta\to\infty}\sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}}\exp\left[-\frac{\zeta}{2}(zI-a^{\dagger})^2\right]|0\rangle\\&=\delta(zI-a^{\dagger})|0\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\delta^{(n)}(z)|n\rangle。\end{aligned}\tag{3.188}$$

这与(3.176)式一致。

产生算符本征态与相干态所组成的围道积分完备性可应用于导出光场的复 P 表示(见书 I),也可用于讨论信号分析中的 Z 变换[36]。这里用(3.176)式计算:

$$
\begin{aligned}
{}_{*}\langle z \mid \alpha,\zeta\rangle &= \langle 0 \mid \exp\left(-a\frac{\partial}{\partial z}\right)\exp\left(\alpha a^{+}-\frac{\zeta}{2}a^{+2}\right)\mid 0\rangle\delta(z) \\
&= \langle 0 \mid \exp\left(\alpha a^{+}-\frac{\zeta}{2}a^{+2}+\zeta a^{+}\frac{\partial}{\partial z}\right)\exp\left(-a\frac{\partial}{\partial z}\right)\mid 0\rangle \\
&\quad\cdot\exp\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\zeta}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)\delta(z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-2\zeta\pi}}\exp\left[\frac{(z-\alpha)^{2}}{2\zeta}\right]。
\end{aligned}
\tag{3.189}
$$

在上式左边代入完备性(3.179)式并展开(压缩相干态用相干态的路径积分展开)

$$
\mid \alpha,\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{-2\zeta\pi}}\int_{c}\mathrm{d}z\exp\left[\frac{(z-\alpha)^{2}}{2\zeta}\right]\mid z\rangle, \tag{3.190}
$$

式中积分的路径可以在很大程度上变形,但是为了积分收敛,它必须能够保证高斯函数 $\exp\left[\frac{(z-\alpha)^{2}}{2\zeta}\right]$在无穷远处为零。

习　　题

1. 由于相干态$|z\rangle$是定义在复平面上的,熟悉复数的若干微积分运算对研究工作十分有益,令 $z=x+\mathrm{i}y$,则有

$$
\partial_{z} = \frac{1}{2}(\partial_{x}-\mathrm{i}\partial_{y}),
$$

$$
\partial_{z^{*}} = \frac{1}{2}(\partial_{x}+\mathrm{i}\partial_{y}),
$$

$$
\mathrm{d}f = \partial_{z}f\mathrm{d}z+\partial_{z^{*}}f\mathrm{d}z^{*}。
$$

(1) 证明$\nabla^{2}=4\partial_{z^{*}}\partial_{z}$。

(2) 用 Stokes 定理及$\oint_{c}\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}$,证明 $\partial_{z^{*}}\partial_{z}\ln z=\pi\delta^{(2)}(x,y)$。

2. 从相干态的过完备性知

$$
\mid z'\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}\mid z\rangle\langle z\mid z'\rangle。
$$

另一方面,由 δ 函数可知

$$|z'\rangle=\int\frac{d^2z}{\pi}\delta^{(2)}(z-z')|z\rangle。$$

那么，从

$$\int d^2z|z'\rangle\left[\frac{\langle z|z'\rangle}{\pi}-\delta^{(2)}(z-z')\right]=0,$$

能够得出什么结论？

3. 设复数 z 的极分解是 $z=\sqrt{\frac{I}{\hbar}}e^{-i\theta}$，设想 I 为作用量。

(1) 求 $\left|\left[\frac{\partial(\sqrt{\hbar}z,\sqrt{\hbar}z^*)}{\partial(I,\theta)}\right]\right|$。

(2) 是否有：$z^*\frac{\partial}{\partial z^*}-z\frac{\partial}{\partial z}=-i\frac{\partial}{\partial\theta}$，

$$z^*\frac{\partial}{\partial z^*}+z\frac{\partial}{\partial z}=2I\frac{\partial}{\partial I}。$$

(3) 是否有 $z^{*2}\frac{\partial^2}{\partial(z^*)^2}-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}=i\frac{\partial}{\partial\theta}-2iI\frac{\partial^2 I}{\partial I\partial\theta}$。

4. 作为算符恒等式(3.11)的一个应用，讨论一个带电振子在匀强磁场中的运动，磁场沿 z 方向，矢势为 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}(-By,Bx,0)$，哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2)\\&=\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)-\omega_L(xP_y-yP_x),\end{aligned}$$

式中，$\omega_L=\frac{eB}{2m}$，$\omega^2=\omega_0^2+\omega_L^2$。

定义

$$a_i=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}r_i+i(2m\omega\hbar)^{-\frac{1}{2}}P_i,$$

$$i\equiv x,y,\quad r_x\equiv x,\quad r_y\equiv y,$$

则

$$H=\hbar\omega(a_x^\dagger a_x+a_y^\dagger a_y+1)+i\hbar\omega_L(a_x^\dagger a_y-a_xa_y^\dagger)。$$

(1) 求：$e^{-\beta H}$ 的正规乘积展开，$\beta=\frac{1}{kT}$，k 是玻尔兹曼常数。

(2) 求此系统的配分函数 $Z=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}$。

5. 试把平面上的 Stokes 定理

$$\int_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

改写为外微分形式

$$\int_c g\mathrm{d}z + h\mathrm{d}z^* = \iint_B \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z^*}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z^*。$$

第四章

Weyl 编序、Wigner 算符与纠缠态

4.1 Weyl 量子化方案和 Weyl 编序内的积分技术

经典函数 $q^m p^r$ 在量子化为算符时有多种偏序方案。Weyl 给出的量子化规则是[46](在 4.1 和 4.2 中记 Q 为坐标算符)

$$q^m p^r \to \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l} P^r Q^l, \tag{4.1}$$

所以上式右边就是 Weyl 编序好了的。这种编序的好处不但在于它可以自然地导致路径积分的“中点”取法,即取(4.1)式右边算符的坐标表象矩阵元:

$$\begin{aligned}
&\langle q \mid \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l} P^r Q^l \mid q' \rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} q^{m-l} q'^l \langle q \mid P^r \mid q' \rangle \\
&= \left(\frac{q+q'}{2}\right)^m \left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)^r \delta(q-q') \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} \left(\frac{q+q'}{2}\right)^m p^r。
\end{aligned} \tag{4.2}$$

而且当引入 Weyl 编序的记号$\vdots\ \ \vdots$(如同正规排序的算符用: :记号那样的做法)后,再利用 Weyl 编序算符内的积分技术,就可以给量子光学中 Wigner 函数和 Wigner 变换的研究带来莫大的便利。

Weyl 量子化方案与 Wigner 算符密切关联,这可以从将(4.2)式略作推广而看出,即把(4.2)式归纳为

$$\langle q|H(P,Q)|q'\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')}h\left(p,\frac{q+q'}{2}\right)。\tag{4.3}$$

$H(P,Q)$就是经典函数$h(p,q)$的Weyl量子化对应。为了进一步明确此关系，把(4.3)式两边左乘$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q|q\rangle$，右乘$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\langle q'|$，并用坐标表象完备性，得到

$$\begin{aligned}H(P,Q)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q|q\rangle\langle q'|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')}h\left(p,\frac{q+q'}{2}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}u\,h(p,q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu}\left|q+\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle q-\frac{u}{2}\right|。\end{aligned}\tag{4.4}$$

记

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu}\left|q+\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle q-\frac{u}{2}\right|=\Delta(p,q)=\Delta^{\dagger}(p,q)\tag{4.5}$$

为Wigner算符[47]，则Weyl对应规则就概括为

$$H(P,Q)=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,h(p,q)\Delta(p,q)。\tag{4.6}$$

作为一个显然的量子化例子，可以看出存在以下对应：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu+\mathrm{i}qv}\rightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pu+\mathrm{i}Qv},\tag{4.7}$$

即由于算符Q与P在指数上相加，不存在排序的含糊性。代入(4.6)式，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pu+\mathrm{i}Qv}=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu+\mathrm{i}qv}\Delta(p,q)=\vdots\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pu+\mathrm{i}Qv}\,\vdots。\tag{4.8}$$

左边的算符已经是Weyl编序了的，所以可以在其外面加上记号$\vdots\ \vdots$。从(4.8)式看出，Wigner算符$\Delta(p,q)$的Weyl编序形式是

$$\Delta(p,q)=\vdots\,\delta(p-P)\delta(q-Q)\,\vdots,$$

或

$$\Delta(\alpha)=\frac{1}{2}\vdots\,\delta(\alpha-a)\delta(\alpha^{*}-a^{\dagger})\,\vdots,\tag{4.9}$$

式中$\alpha=\frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$。实际上在把(4.9)式代入(4.8)式中间的表达式时已经用了在Weyl编序内的积分技术。下面概括如下[48]：

(1) Weyl对应规则(4.6)式本身可以纳入Weyl编序形式，

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}q h(p,q)\Delta(q,p) = \vdots\, h(P,Q)\, \vdots \tag{4.10}$$

（注意右边的函数也是 h 了。）或

$$\vdots\, G(a^{\dagger},a)\, \vdots = \vdots \int \mathrm{d}^2\alpha G(\alpha^*,\alpha)\delta(\alpha^* - a^{\dagger})\delta(\alpha - a)\, \vdots。$$

（2）玻色算符在 Weyl 编序记号$\vdots\quad\vdots$内部是对易的。

（3）可以对$\vdots\quad\vdots$内部的 c 数进行积分运算，只要该积分收敛。

（4）$\vdots\quad\vdots$记号内部的$\vdots\quad\vdots$记号可以取消。

（5）相似变换不改变 Weyl 编序。设 V 为一个相似变换算符，则有

$$V\vdots\, XY\cdots\cdots Z\,\vdots V^{-1} = \vdots\, V(XY\cdots\cdots Z)V^{-1}\,\vdots。\tag{4.11}$$

上式已在书Ⅰ与书Ⅱ中给予证明，这里不再赘述。以上规则中值得注意的是(4.10)式说明一个已经 Weyl 编序好了的算符$\vdots\, h(P,Q)\,\vdots$的经典对应函数能够直接地由替代 $P\to p, Q\to q$ 而得到。另外要注意的是，若想把$\vdots\quad\vdots$除去，必须先将其内部的算符排成 Weyl 编序。例如，欲将$\vdots\, Q^m P^r\,\vdots$的$\vdots\quad\vdots$脱去，必须先重排它为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m \vdots \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l}P^rQ^l\,\vdots, \tag{4.12}$$

而后才能脱去$\vdots\quad\vdots$。又如，由

$$\vdots\, \delta(p-P)\delta(q-Q)\,\vdots = \iint \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{2\pi} \vdots\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}u(q-Q)+\mathrm{i}v(p-P)}\,\vdots,$$

可得

$$\Delta(p,q) = \frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{d}u\mathrm{d}v \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)v}。\tag{4.13}$$

读者可以另用方法证明(4.5)式与(4.13)式是一致的。

此外，可以从(4.12)式直接导出 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(4.9)，有兴趣的读者试证之。

4.2 由量子统计的含义导出 Wigner 算符

以上是从 Weyl 量子化的角度自然地引进了 Wigner 算符。

事实上，还可以在量子统计的意义下引入它。早在 1932 年，Wigner 就提出这样的问题：鉴于在量子力学中坐标算符 Q 与动量算符 P 不对易，不能同时精确地测量某个粒子的坐标与动量，那么能否在经典 q-p 相空间中找到一个描述量子态 $|\psi\rangle$ 分布的函数 $W(q,p)$（称为 Wigner 函数），使得其在 q 方向上的边缘分布与 p 方向的边缘分布分别为

$$P(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(q,p)\mathrm{d}p,$$
$$P(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(q,p)\mathrm{d}q, \tag{4.14}$$

式中 $P(q)[P(p)]$ 表示发现粒子处在态 $|\psi\rangle$ 时测量其坐标得到 q 值（具有动量值 p）的几率。对于纯态 $|\psi\rangle$ 而言，正好有关系

$$W(q,p)=\langle\psi\mid\Delta(q,p)\mid\psi\rangle。\tag{4.15}$$

而对于由密度矩阵 ρ 描写的系统，在坐标表象中 Wigner 函数的定义为

$$W(q,p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle q+\frac{v}{2}|\rho|q-\frac{v}{2}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pv}\mathrm{d}v=\mathrm{Tr}[\rho\Delta(q,p)], \tag{4.16}$$

即 Wigner 算符的纯态平均（或混合态平均）正好给出 Wigner 函数。

由测量 Wigner 函数可以间接地得到关于波函数的信息。例如从(4.5)式可见，当纯态密度矩阵 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ 时，相应的 Wigner 函数是（补上普朗克常数）

$$W(q,p)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v\exp\left(-\frac{\mathrm{i}pv}{\hbar}\right)\psi^{*}\left(q-\frac{v}{2}\right)\psi\left(q+\frac{v}{2}\right)。\tag{4.17}$$

由此导出

$$\psi^{*}\left(q-\frac{v}{2}\right)\psi\left(q+\frac{v}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left(\frac{\mathrm{i}pv}{\hbar}\right)W(q,p)。\tag{4.18}$$

当取 $q=\frac{v}{2}$，上式变为

$$\psi^*(0)\psi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(\frac{\mathrm{i}pv}{\hbar}\right) W\left(\frac{v}{2}, p\right),$$
$$\psi(0) \equiv |\psi(0)| \exp\left(\frac{\mathrm{i}S(0)}{\hbar}\right)。\tag{4.19}$$

所以把 v 换成 x 后，得

$$\psi(x) = \frac{\exp\left(\frac{\mathrm{i}S(0)}{\hbar}\right)}{|\psi(0)|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(\frac{\mathrm{i}px}{\hbar}\right) W\left(\frac{x}{2}, p\right), \tag{4.20}$$

即从 Wigner 函数可知 $\psi(x)$。因此现在有不少实验致力于 Wigner 函数的测量。以下用 IWOP 技术所得的结果导出 Wigner 算符。在第二章已知坐标本征态投影算符是

$$|q\rangle\langle q| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp[-(q-Q)^2] :, \tag{4.21}$$

动量本征态投影算符是

$$|p\rangle\langle p| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp[-(p-P)^2] :, \tag{4.22}$$

把二者以如下方式结合：

$$\frac{1}{\pi} : \exp[-(q-Q)^2 - (p-P)^2] :, \tag{4.23}$$

容易看出其单侧积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q : \exp[-(q-Q)^2 - (p-P)^2] : = |p\rangle\langle p|, \tag{4.24}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p : \exp[-(p-P)^2 - (q-Q)^2] : = |q\rangle\langle q|。\tag{4.25}$$

根据 Wigner 分布函数的物理意义，立刻就可得到这样的结论，即 Wigner 算符为

$$\Delta(q,p) = \frac{1}{\pi} : \exp[-(q-Q)^2 - (p-P)^2] :。\tag{4.26}$$

引入

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p),$$

则

$$\Delta(q,p) \to \Delta(\alpha) = \frac{1}{\pi} : \exp[-2(a^{\dagger} - \alpha^{*})(a - \alpha)] : 。\tag{4.27}$$

由此立即得到相干态的 Wigner 函数是

$$\langle z \mid \Delta(q,p) \mid z\rangle = \frac{1}{\pi}\exp[-2(z^{*} - \alpha^{*})(z - \alpha)]。\tag{4.28}$$

(4.28)式又可以写为

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \pi^{-1} D(2\alpha)(-1)^{N}, \\ N = a^{\dagger} a, \quad D(\alpha) &= \exp(\alpha a^{\dagger} - \alpha^{*} a), \end{aligned}\tag{4.29}$$

由$(-1)^{N} a (-1)^{N} = -a$,可以导出

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha)\Delta(\alpha') &= \pi^{-2} D(2\alpha) D(-2\alpha') \\ &= \pi^{-2} D[2(\alpha - \alpha')]\exp[2(\alpha^{*}\alpha' - \alpha'^{*}\alpha)], \end{aligned}\tag{4.30}$$

再由相干态的过完备性导出

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\Delta(\alpha)\Delta(\alpha')] &= \frac{1}{\pi}\delta(\alpha - \alpha')\delta(\alpha^{*} - \alpha'^{*}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\delta(q - q')\delta(p - p')。 \end{aligned}\tag{4.31}$$

因此,由 Weyl 对应式(4.6)可以求出算符 $H(P,Q)$的经典对应函数

$$h(p,q) = 2\pi \mathrm{Tr}[H(P,Q)\Delta(q,p)]。\tag{4.32}$$

联立(4.31)式和(4.32)式可见,Wigner 算符本身的经典 Weyl 对应函数就是

$$\Delta(\alpha') \to \delta(q - q')\delta(p - p'), \quad \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(q' + \mathrm{i}p')。\tag{4.33}$$

这与(4.9)式一致,它可以由(4.10)式进一步肯定,即把 Δ 的经典 Weyl 对应函数(4.33)式作为(4.10)式中的 $h(p,q)$代入,就得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\delta(q - q')\delta(p - p')\Delta(p,q) = \vdots\, \delta(q' - Q)\delta(p' - P) \,\vdots 。\tag{4.34}$$

作为练习，有兴趣的读者可以求

$$U=\exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}Q^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(QP+PQ)\ln A\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}P^2\right) \tag{4.35}$$

的 Weyl 编序形式，式中 A,B,C 为实数。

4.3　相干态投影算符和密度矩阵的 Weyl 编序形式

由(4.32)式可以求出$|z\rangle\langle z|$的经典 Weyl 对应：

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{Tr}[|z\rangle\langle z|\Delta(\alpha)]&=2\langle z|:\exp[-2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)]:|z\rangle\\&=2\exp[-2(z^*-\alpha^*)(z-\alpha)]。\end{aligned} \tag{4.36}$$

根据 Weyl 编序的性质与(4.9)式，立即得到$|z\rangle\langle z|$的 Weyl 编序式：

$$\begin{aligned}|z\rangle\langle z|&=2\int\mathrm{d}^2\alpha\exp[-2(z^*-\alpha^*)(z-\alpha)]\,\vdots\,\delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\,\vdots\\&=2\,\vdots\,\exp[-2(z^*-a^\dagger)(z-a)]\,\vdots\,。\end{aligned} \tag{4.37}$$

于是算符的相干态对角表示(P 表示)就可纳入 Weyl 编序：

$$\rho=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P(z)|z\rangle\langle z|=2\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\,\vdots\,\exp[-2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)]\,\vdots\,P(z)。 \tag{4.38}$$

上式是把反正规乘积排序的算符化为 Weyl 编序的一般公式，因为从反正规算符立即得其 P 表示。进一步把 $P(z)$代入(4.38)式积分，就得到 ρ 的 Weyl 编序展开。

在文献[49]中，Mehta 曾给出由 ρ 求 $P(z)$的一个公式：

$$P(z)=\exp(|z|^2)\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta|\rho|\beta\rangle\exp(|\beta|^2+\beta^*z-\beta z^*), \tag{4.39}$$

式中$|\beta\rangle$是相干态。把(4.39)式代入(4.38)式并对 d^2z 积分，得

$$\hat{\rho}=2\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp(|z|^2)\,\vdots\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle$$

$$\cdot \exp[|\beta|^2+\beta^* z-\beta z^*-2(z^*-a^\dagger)(z-a)] \vdots$$

$$=2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle-\beta|\hat{\rho}|\beta\rangle \exp[2(\beta^* a-a^\dagger \beta+a^\dagger a)] \vdots 。 \tag{4.40}$$

这就给出了如何把正规乘积形式的算符化为 Weyl 编序的途径，因为正规乘积了的 ρ 的相干态矩阵元 $\langle-\beta|\rho|\beta\rangle$ 是可以直接写出的。特别当 ρ 是单位矩阵时，自然地得到[50]

$$2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp[-2(\beta^*+a^\dagger)(\beta-a)] \vdots = 1。 \tag{4.41}$$

4.4 密度矩阵的反正规乘积展开与反正规乘积内的积分技术[51]

从相干态投影算符的 Weyl 经典对应(4.36)式又可见

$$|z\rangle\langle z|=2\int \frac{d^2\alpha}{\pi^2}\exp[-2(z^*-\alpha^*)(2-\alpha)] \vdots \int d^2\tau$$

$$\cdot \exp[\tau^*(z-a)-\tau(z^*-a^\dagger)] \vdots 。$$

上式右边的$\vdots \quad \vdots$可以脱掉，因为脱掉后仍是 Weyl 编序的，于是有

$$|z\rangle\langle z|=2\int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} \vdots \exp\left[-2|z|^2-2|\alpha|^2+2\alpha^* z+2z^*\alpha\right.$$

$$\left.+\tau^*(z-a)-\tau(z^*-a^\dagger)+\frac{|\tau|^2}{2}\right] \vdots 。 \tag{4.42}$$

式中$\vdots \quad \vdots$表示反正规乘积记号，即在一个算符函数中所有的湮灭算符都排在产生算符之左。这样也可以引入在反正规乘积内的积分技术，其要点是：

(1) 在$\vdots \quad \vdots$内部玻色算符是对易的。

(2) 可以对$\vdots \quad \vdots$内部的 c 数积分，只要此积分是收敛的。

(3) 在$\vdots \quad \vdots$内部的反正规乘积记号$\vdots \quad \vdots$可以取消。

根据这些性质，对(4.42)式中的 $\int d^2\alpha$ 积分，得

$$|z\rangle\langle z| = :\int\frac{d^2\tau}{\pi}\exp[\tau^*(z-a)-\tau(z^*-a^\dagger)]:$$
$$=\pi\delta(z-a)\delta(z^*-a^\dagger), \tag{4.43}$$

把它代入 P 表示式(4.38)中,并用反正规乘积内的积分法,得到

$$\rho=\int\frac{d^2z}{\pi}\exp(|z|^2)\int d^2\beta\,\vdots\langle-\beta|\rho|\beta\rangle$$
$$\cdot\exp(|\beta|^2+\beta^*z-\beta z^*)\delta(z-a)\delta(z^*-a^\dagger)\vdots$$
$$=\int\frac{d^2\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|\rho|\beta\rangle\exp(|\beta|^2+\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a)\vdots。 \tag{4.44}$$

这就是密度矩阵的反正规乘积展开式。当 ρ 已是正规乘积时,其相干态矩阵元 $\langle-\beta|\rho|\beta\rangle$ 是唾手可得的,所以使用(4.44)式极为方便。特别当 ρ 是单位矩阵时,(4.44)式简化为

$$\int\frac{d^2\beta}{\pi}\vdots\exp(-|\beta|^2+\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a)\vdots=1。 \tag{4.45}$$

读者可以比较(3.5)式与(4.45)式,从中看出其异同。

下面给出反正规乘积内积分技术的一些应用[52]。回顾在第三章3.2节中导出的算符恒等式:

$$a^n a^{\dagger m}=(-\mathrm{i})^{m+n}\vdots\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)\vdots, \tag{4.46}$$

把它代入(4.44)式,得到

$$a^n a^{\dagger m}=\int\frac{d^2z}{\pi}\vdots\langle-z|(-\mathrm{i})^{m+n}\vdots\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)\vdots|z\rangle$$
$$\cdot\exp(|z|^2+z^*a-za^\dagger+a^\dagger a)\vdots$$
$$=\vdots a^n a^{\dagger m}\vdots。 \tag{4.47}$$

由此悟出一个积分公式:

$$(-\mathrm{i})^{m+n}e^{\sigma\tau}\int\frac{d^2z}{\pi}\mathrm{H}_{m,n}(-\mathrm{i}z^*,\mathrm{i}z)\exp(-|z|^2+z^*\sigma-z\tau)=\sigma^n\tau^m。 \tag{4.48}$$

与此相逆的一个积分是

$$(-\mathrm{i})^{m+n}\mathrm{e}^{\sigma\tau}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}z^n z^{*m}\exp(-|z|^2+\mathrm{i}z^*\sigma+\mathrm{i}z\tau)=\mathrm{H}_{m,n}(\sigma,\tau)。\tag{4.49}$$

进行积分变数变换：$-\mathrm{i}z^*\to z^*$，$\mathrm{i}z\to z$，上式转化为

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\mathrm{H}_{m,n}(z^*,z)\exp[-(z^*-\mathrm{i}\tau)(z-\mathrm{i}\sigma)]=(\mathrm{i}\sigma)^n(\mathrm{i}\tau)^m。\tag{4.50}$$

用(4.44)式又可导出

$$\begin{aligned}a^{\dagger m}a^n&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\langle -z|a^{\dagger m}a^n|z\rangle\exp(|z|^2+z^*a-za^\dagger+a^\dagger a):\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:(-z^*)^m z^n\exp(-|z|^2+z^*a-za^\dagger+a^\dagger a):\\&=:\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{n!m!}{l!(n-l)!(m-l)!}a^{n-l}(a^\dagger)^{m-l}(-1)^l:\\&=:\mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a):=:\mathrm{H}_{n,m}(a,a^\dagger):。\end{aligned}\tag{4.51}$$

上式是(4.46)式的“伙伴”关系式。由此式可以反过来验证双模厄米特多项式的母函数公式。事实上，由

$$\mathrm{e}^{ta^\dagger}\mathrm{e}^{t'a}=:\exp(-tt'+ta^\dagger+t'a):,\tag{4.52}$$

左边展开为

$$\mathrm{e}^{ta^\dagger}\mathrm{e}^{t'a}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}a^{\dagger m}a^n=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}:\mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a):,\tag{4.53}$$

再将两式比较，可得

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(\alpha,\alpha^*)=\exp(-tt'+t\alpha+t'\alpha^*)。\tag{4.54}$$

由(4.51)式又可导出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a^\dagger}a^{\dagger m}a^n&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a^\dagger}:\mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a):=m(a^\dagger)^{m-1}a^n\\&=m:\mathrm{H}_{m-1,n}(a^\dagger,a):,\end{aligned}$$

$$a^{\dagger m}a^{n}\overleftarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}}=n\,\vdots\,\mathrm{H}_{m,n-1}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,。\tag{4.55}$$

这与下式一致：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{H}_{m,n}(\alpha,\beta)&=m\mathrm{H}_{m-1,n}(\alpha,\beta),\\ \frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{H}_{m,n}(\alpha,\beta)&=n\mathrm{H}_{m,n-1}(\alpha,\beta)。\end{aligned}\tag{4.56}$$

由(4.46)式可得

$$\begin{aligned}a^{\dagger m}a^{n}a^{\dagger k}a^{j}&=(-\mathrm{i})^{k+n}:a^{\dagger m}\mathrm{H}_{k,n}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a)a^{j}:\\ &=\sum_{l=0}^{\min(n,k)}\frac{n!k!(-1)^{l}}{l!(n-l)!(k-l)!}(a^{\dagger})^{m+k-l}a^{n-l+j}\\ &=\sum_{l=0}^{\min(n,k)}\frac{n!k!(-1)^{l}}{l!(n-l)!(k-l)!}\,\vdots\,\mathrm{H}_{m+k-l,n+j-l}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,。\end{aligned}\tag{4.57}$$

另一方面，

$$a^{\dagger m}a^{n}a^{\dagger k}a^{j}=\,\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,\,\vdots\,\mathrm{H}_{k,j}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,,\tag{4.58}$$

比较以上两式，得

$$\begin{aligned}&\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,\,\vdots\,\mathrm{H}_{k,j}(a^{\dagger},a)\,\vdots\\ &=\sum_{l=0}^{\min(n,k)}\frac{n!k!(-1)^{l}}{l!(n-l)!(k-l)!}\,\vdots\,\mathrm{H}_{m+k-l,n+j-l}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,。\end{aligned}\tag{4.59}$$

进一步又可导出

$$\begin{aligned}a^{n}a^{\dagger k}a^{j}a^{\dagger m}&=(-\mathrm{i})^{k+n}:\mathrm{H}_{k,n}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a):(-\mathrm{i})^{m+j}:\mathrm{H}_{m,j}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a):\\ &=a^{n}\,\vdots\,\mathrm{H}_{k,j}(a^{\dagger},a)\,\vdots\,a^{\dagger m}\\ &=\sum_{l=0}^{\min(j,k)}\frac{j!k!(-1)^{l}}{l!(j-l)!(k-l)!}a^{n+j-l}(a^{\dagger})^{m+k-l}\\ &=\sum_{l=0}^{\min(j,k)}(-\mathrm{i})^{m+j+n+k}\frac{j!k!}{l!(j-l)!(k-l)!}\\ &\quad\cdot:\mathrm{H}_{m+k-l,n-l+j}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a):。\end{aligned}\tag{4.60}$$

此外，由纠缠态$|\eta\rangle$的完备性与 IWOP 技术，又得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_{m,n}(a^{\dagger}-b, a-b^{\dagger}) &= \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(\eta^*, \eta) \mid \eta\rangle\langle\eta \mid \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(\eta^*, \eta) : \exp\{-[\eta^* - (a^{\dagger} - b)] \\
&\quad \cdot [\eta - (a - b^{\dagger})]\} : \\
&= :(a^{\dagger} - b)^m (a - b^{\dagger})^n:。
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

在最后一步的推导中用到了(4.50)式。

4.5 纠缠态与 Wigner 函数[53]

本节讨论由纠缠态$|\eta\rangle$与$|\xi\rangle$构造两体 Wigner 算符及其物理意义。对于一个双粒子纠缠系统，其两个粒子是如此地纠缠着，以至于没有一个粒子能单独有一个态。换言之，处于纠缠态的粒子没有独立的态，或者甚至没有独立粒子的性质。鉴于此，当仍要用 Wigner 函数来描写一个纠缠态时，此 Wigner 函数的边缘分布不应该反映独立单个粒子的性质而应该反映出整个系统所处的态包含的纠缠性质。也就是说，单粒子态的 Wigner 函数其边缘分布分别反映发现粒子处在位置q和具有动量p的几率，此种解释，必须作合理的改进与推广，才能适合于纠缠粒子系统(尤其是多粒子情况)，否则就将不再是物理的。以双粒子纠缠态$|\eta\rangle$为例，由(2.3)式可知投影算符$|\eta\rangle\langle\eta|$的正规乘积展开是

$$
\begin{aligned}
|\eta\rangle\langle\eta| &= :\exp[-(\eta - a_1 + a_2^{\dagger})(\eta^* - a_1^{\dagger} + a_2)]: \\
&= :\exp\left[-\left(\eta_1 - \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\eta_2 - \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:。
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

另一方面，与$|\eta\rangle$正则共轭的纠缠态$|\xi\rangle$的投影算符的正规乘积形式是

$$
\begin{aligned}
|\xi\rangle\langle\xi| &= :\exp[-(\xi - a_2^{\dagger} - a_1)(\xi^* - a_1^{\dagger} - a_2)]: \\
&= :\exp\left[-\left(\xi_1 - \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\xi_2 - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:。
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

对照(4.23)式与(4.24)式，想象适合于两体纠缠系统的 Wigner 算符可以由(4.63)式与(4.62)式构造出来，即

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi^2}:\exp[-(\sigma-a_1+a_2^{\dagger})(\sigma^*-a_1^{\dagger}+a_2)$$
$$-(\gamma-a_2^{\dagger}-a_1)(\gamma^*-a_1^{\dagger}-a_2)]: \tag{4.64}$$

或

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi^2}:\exp\left[-\left(\sigma_1-\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\sigma_2-\frac{P_1+P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right.$$
$$\left.-\left(\gamma_1-\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\gamma_2-\frac{P_1-P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:。\tag{4.65}$$

这样构造出来的 Wigner 算符，其边缘分布分别是

$$\int d^2\sigma\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi}:\exp[-(\gamma-a_2^{\dagger}-a_1)(\gamma^*-a_1^{\dagger}-a_2)]:$$
$$=\frac{1}{\pi}|\gamma\rangle\langle\gamma|\bigg|_{\xi=\gamma}, \tag{4.66}$$

$$\int d^2\gamma\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|\bigg|_{\eta=\sigma}。 \tag{4.67}$$

相应的双粒子态$|\psi\rangle$的 Wigner 函数的边缘分布分别是

$$\int d^2\sigma\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle=\frac{1}{\pi}|\psi(\xi)|^2\bigg|_{\xi=\gamma}, \tag{4.68}$$

$$\int d^2\gamma\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle=\frac{1}{\pi}|\psi(\eta)|^2\bigg|_{\eta=\sigma}, \tag{4.69}$$

式中$|\psi(\xi)|^2$表示当纠缠双粒子系统处于态$|\psi\rangle$时，测量其处于相对动量$\sqrt{2}\xi_2$及质心坐标为$\sqrt{2}\xi_1$的几率，而$|\psi(\eta)|^2$表示测量其处于相对位置$\sqrt{2}\eta_1$与总动量为$\sqrt{2}\eta_2$的几率，也就是边缘分布以纠缠的面目出现。

可以进一步证明$\Delta(\sigma,\gamma)$在$|\eta\rangle$表象中为

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}|\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta|\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma), \tag{4.70}$$

而在$|\xi\rangle$表象中为

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\xi}{\pi^3}|-\xi+\gamma\rangle\langle\xi+\gamma|\exp(\xi^*\sigma-\xi\sigma^*)。\tag{4.71}$$

事实上用有序算符内正规乘积积分技术对(4.70)式或(4.71)式积分，就可得(4.65)式，再令

$$\begin{aligned}&\gamma=\alpha+\beta^*,\quad \sigma=\alpha-\beta^*,\\&\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+\mathrm{i}p_1),\\&\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+\mathrm{i}p_2),\end{aligned}\tag{4.72}$$

就可以看出

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma,\gamma)&=\pi^{-2}:\exp[-2(a_1^\dagger-\alpha^*)(a_1-\alpha)-2(a_2^\dagger-\beta^*)(a_2-\beta)]:\\&=\Delta(\alpha)\Delta(\beta)。\end{aligned}\tag{4.73}$$

所以，$\Delta(\sigma,\gamma)$是双模 Wigner 算符在纠缠态表象中的表示。

由双模压缩算符 $S_2(\mu)$的纠缠态表象(2.40)式及纠缠态的正交性，可知 Wigner 算符的压缩变换是

$$\begin{aligned}S^\dagger(\mu)\Delta(\sigma,\gamma)S(\mu)=&\mu^2\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}|\mu(\sigma-\eta)\rangle\langle\mu(\sigma+\eta)|\\&\cdot\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)。\end{aligned}\tag{4.74}$$

由此导出双模压缩粒子数态的 Wigner 函数是

$$\begin{aligned}&\langle m,n|S^\dagger(\mu)\Delta(\sigma,\gamma)S(\mu)|m,n\rangle\\&=\frac{\mu^2}{m!n!}\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp\left[-\frac{1}{2}|\mu(\sigma-\eta)|^2-\frac{1}{2}|\mu(\sigma+\eta)|^2\right]\\&\quad\cdot\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)\mathrm{H}_{m,n}[\mu(\sigma-\eta),\mu(\sigma^*-\eta^*)]\\&\quad\cdot\mathrm{H}_{n,m}[\mu(\sigma+\eta),\mu(\sigma^*+\eta^*)]\\&=\frac{\mu^2}{m!n!}\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m\partial t'^n}\frac{\partial^{n+m}}{\partial r^n\partial r'^m}\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma-|\mu\sigma|^2-|\mu\eta|^2)\\&\quad\cdot\exp[-tt'+t\mu(\sigma-\eta)+t'\mu(\sigma^*-\eta^*)-rr'+r\mu(\sigma+\eta)\\&\quad+r'\mu(\sigma^*+\eta^*)]\Big|_{t,t',r,r'=0}\\&=\frac{1}{\pi^2m!n!}\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m\partial t'^n}\frac{\partial^{n+m}}{\partial r^n\partial r'^m}\exp\left[-\mu^2|\sigma|^2-|\gamma|^2\frac{1}{\mu^2}\right.\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{\mu}\gamma^*+r-\mu\sigma^*\right)t'\Big]\exp\Big[t\left(\frac{1}{\mu}\gamma-r'+\mu\sigma\right)$$

$$+r'\left(\mu\sigma^*+\frac{1}{\mu}\gamma^*\right)+r\left(\mu\sigma-\frac{1}{\mu}\gamma\right)\Big]\Big|_{t,t',r,r'=0}$$

$$=\frac{(-1)^{n+m}}{\pi^2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\binom{m}{k}\frac{1}{k!}\binom{n}{l}\frac{1}{l!}(-1)^{k+l}\left|\frac{1}{\mu}\gamma-\mu\sigma\right|^{2l}\left|\frac{1}{\mu}\gamma+\mu\sigma\right|^{2k}$$

$$\cdot\exp\left(-\mu^2|\sigma|^2-|\gamma|^2\frac{1}{\mu^2}\right),\tag{4.75}$$

特别地，双模压缩真空态的 Wigner 函数是

$$\langle 0,0|S^\dagger(\mu)\Delta(\sigma,\gamma)S|0,0\rangle=\pi^{-2}\exp\left(-\mu^2|\sigma|^2-\frac{|\gamma|^2}{\mu^2}\right)$$

$$=\pi^{-2}\exp\Big\{-\frac{1}{4}\mu^2[(x_1-x_2)^2+(p_1+p_2)^2]$$

$$-\frac{1}{4\mu^2}[(x_1+x_2)^2+(p_1-p_2)^2]\Big\}。\tag{4.76}$$

而 EPR 纠缠态本身的 Wigner 函数也可由(4.70)式和(4.72)式立即导出：

$$\langle\eta|\Delta(\sigma,\gamma)|\eta\rangle=\int\frac{d^2\eta'}{\pi^3}\langle\eta|\sigma-\eta'\rangle\langle\sigma+\eta'|\exp(\eta'\gamma^*-\eta'^*\gamma)|\eta\rangle$$

$$=(2\pi)^{-1}\delta[\sqrt{2}\eta_1-(x_1-x_2)]\delta[\sqrt{2}\eta_2-(p_1+p_2)]。\tag{4.77}$$

它正确地反映了测量 $|\eta\rangle$ 在相空间 (x_1-x_2,p_1+p_2) 中的值。

另一方面，根据(4.40)式可以求 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Weyl 编序形式，这将在 4.6 节中给出。

用纠缠态表象下的 Wigner 算符(4.70)式写出的双模密度算符的 Wigner 函数是

$$W_\rho(\sigma,\gamma)=\mathrm{Tr}[\rho\Delta(\sigma,\gamma)]$$

$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)。\tag{4.78}$$

当 ρ 是纯态密度算符 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ 时，Wigner 函数的边缘分布

$$\int d^2\sigma W_\rho(\sigma,\gamma) = \frac{1}{\pi} \mid \psi(\xi) \mid^2 \Big|_{\xi=\gamma},$$
$$\int d^2\gamma W_\rho(\sigma,\gamma) = \frac{1}{\pi} \mid \psi(\eta) \mid^2 \Big|_{\eta=\sigma} \tag{4.79}$$

给出发现两个粒子具有相对动量$\sqrt{2}\xi_2$（总动量为$\sqrt{2}\eta_2$）而同时质心坐标为$\frac{\xi_1}{\sqrt{2}}$（相对位置为$\sqrt{2}\eta_1$）的几率，再计算

$$4\pi^2\int d^2\sigma d^2\gamma W_{\rho_1}(\sigma,\gamma)W_{\rho_2}(\sigma,\gamma)$$
$$=4\int d^2\sigma d^2\gamma\int \frac{d^2\eta}{\pi}\langle\sigma+\eta \mid \rho_1 \mid \sigma-\eta\rangle\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)$$
$$\cdot\int \frac{d^2\eta'}{\pi^3}\langle\sigma+\eta' \mid \rho_2 \mid \sigma-\eta'\rangle\exp(\eta'\gamma^*-\eta'^*\gamma)$$
$$=4\int d^2\sigma\int \frac{d^2\eta}{\pi^2}\langle\sigma+\eta \mid \rho_1 \mid \sigma-\eta\rangle\langle\sigma-\eta \mid \rho_2 \mid \sigma+\eta\rangle。\tag{4.80}$$

令 $\sigma+\eta=\tau,\sigma-\eta=\lambda$，则上式变为

$$\int d^2\tau\int \frac{d^2\lambda}{\pi^2}\langle\tau \mid \rho_1 \mid \lambda\rangle\langle\lambda \mid \rho_2 \mid \tau\rangle = \int \frac{d^2\tau}{\pi}\langle\tau \mid \rho_1\rho_2 \mid \tau\rangle = \mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2), \tag{4.81}$$

式中$|\lambda\rangle$与$|\tau\rangle$都是$|\eta\rangle$型的纠缠态，所以[54]

$$\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2) = 4\pi^2\int d^2\sigma d^2\gamma W_{\rho_1}(\sigma,\gamma)W_{\rho_2}(\sigma,\gamma) \tag{4.82}$$

是纠缠 Wigner 函数的迹乘积规则。特别当 $\rho_1=|\psi\rangle\langle\psi|,\rho_2=|\varphi\rangle\langle\varphi|$都是纯态密度矩阵时，从(4.82)式看出

$$\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2)=\mid\langle\psi\mid\varphi\rangle\mid^2 = \left|\int \frac{d^2\eta}{\pi}\psi^*(\eta)\varphi(\eta)\right|^2$$
$$= 4\pi^2\hbar^2\int d^2\sigma d^2\gamma W_{|\psi\rangle}(\sigma,\gamma)W_{|\varphi\rangle}(\sigma,\gamma), \tag{4.83}$$

式中恢复了 $\hbar$。上式表明跃迁振幅$\langle\psi|\varphi\rangle$可以表达为两个态的 Wigner 函数的乘积在相空间的积分。进一步，当 $\rho_1=\rho_2=\rho$ 时，由于纯态密度矩阵满足 $\mathrm{Tr}(\rho^2)\leqslant 1$，从(4.83)式看出纠缠 Wigner 函

数满足

$$4\pi^2\hbar^2 \leqslant \frac{1}{\int d^2\sigma d^2\gamma W_\rho^2(\sigma,\gamma)}。\tag{4.84}$$

4.6 纠缠态表象中的层析摄影术(Tomography)理论[55]

由(4.40)式得 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Weyl 编序：

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma,\gamma) =& 4\int \frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2} \vdots \langle -\beta_1, -\beta_2 | \frac{1}{\pi^2} \\ & \cdot : \exp[-(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)(\sigma^* - a_1^\dagger + a_2) \\ & - (\gamma - a_2^\dagger - a_1)(\gamma^* - a_1^\dagger - a_2)] : \\ & \cdot | \beta_1, \beta_2\rangle \exp\left[\sum_{i=1}^{2} 2(\beta_i^* a_i - a_i^\dagger \beta_i + a_i^\dagger a_i)\right] \vdots \\ =& \vdots\, \delta(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)\delta(\sigma^* - a_1^\dagger + a_2) \\ & \cdot \delta(\gamma - a_2^\dagger - a_1)\delta(\gamma^* - a_1^\dagger - a_2) \vdots \\ \equiv& \vdots\, \delta^{(2)}(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\gamma - a_2^\dagger - a_1) \vdots。\end{aligned}\tag{4.85}$$

由此又得出纠缠态投影算符的 Weyl 编序：

$$|\eta\rangle\langle\eta| = \pi \vdots\, \delta(\eta - a_1 + a_2^\dagger)\delta(\eta^* - a_1^\dagger + a_2) \vdots，\tag{4.86}$$

$$|\xi\rangle\langle\xi| = \pi \vdots\, \delta(a_1 + a_2^\dagger - \xi)\delta(a_1^\dagger + a_2 - \xi^*) \vdots。\tag{4.87}$$

这种 Weyl 编序形式十分简洁，用来研究 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Radon 变换很是方便，Radon 变换可以给出 Wigner 函数与其“断层摄影照片”之间的关系。这样的理论英文称为 Tomography 理论，其内涵是：只要测定了某个光场的 Wigner 函数的各个方向的边缘分布，就可以了解到光场的全部信息(在医学检验中，无损伤探测 CT 扫描投影成像是平面的，但由 Tomography 理论，就可以推断三维图像)。

由在 Weyl 编序内的积分技术，对(4.85)式积分：

$$R \equiv \iint \pi\delta(s_1 - u_1\sigma_1 - v_1\gamma_2)\delta(s_2 - u_2\gamma_1 - v_2\sigma_2)\Delta(\sigma,\gamma)\mathrm{d}^2\gamma\mathrm{d}^2\sigma, \tag{4.88}$$

这称为纠缠 Radon 变换，因为每个 δ 函数中牵涉到 σ 与 γ 的分量，$u_i, v_i (i=1,2)$ 是变换参数，s_1 与 s_2 是实数。把(4.85)式代入(4.88)式，积分得

$$\begin{aligned} R &= \pi\iint \delta(s_1 - u_1\sigma_1 - v_1\gamma_2)\delta(s_2 - u_2\gamma_1 - v_2\sigma_2) \\ &\quad \cdot ⁝\, \delta(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)\delta(\sigma^* - a_1^\dagger + a_2) \\ &\quad \cdot \delta(\gamma - a_2^\dagger - a_1)\delta(\gamma^* - a_1^\dagger - a_2)\, ⁝\, \mathrm{d}^2\gamma\mathrm{d}^2\sigma \\ &= \pi\, ⁝\, \delta\left[s_1 - u_1\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2) - v_1\frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 + P_2)\right] \\ &\quad \cdot \delta\left[s_2 - u_2\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) - v_2\frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 - P_2)\right] ⁝ \\ &\equiv ⁝\, V\, ⁝\,。 \end{aligned} \tag{4.89}$$

式中 $⁝\, V\, ⁝$ 算符的 Weyl 经典对应函数可根据公式

$$\begin{aligned} &⁝\, F[(X_1 - X_2, P_1 + P_2), (P_1 - P_2, X_1 + X_2)]\, ⁝ \\ &= \iint \mathrm{d}^2\eta\mathrm{d}^2\xi F[\sqrt{2}\eta, \sqrt{2}\xi]\Delta(\eta,\xi) \end{aligned} \tag{4.90}$$

定出(注意这里 $(X_1-X_2, P_1-P_2)=2\mathrm{i}, (X_1+X_2, P_1+P_2)=2\mathrm{i}$)，即

$$\begin{aligned} ⁝\, V\, ⁝ &= \pi\iint \mathrm{d}^2\eta\mathrm{d}^2\xi\delta(s_1 - u_1\eta_1 - v_1\eta_2) \\ &\quad \cdot \delta(s_2 - u_2\xi_1 - v_2\xi_2)\Delta(\eta,\xi)。 \end{aligned} \tag{4.91}$$

把 $\Delta(\eta,\xi)$ 的正规乘积表式代入，得

$$\begin{aligned} R = ⁝\, V\, ⁝ &= \iint \delta(s_1 - u_1\eta_1 - v_1\eta_2)\delta(s_2 - u_2\xi_1 - v_2\xi_2) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\pi} : \exp\left[-\left(\eta_1 - \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\eta_2 - \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right. \\ &\quad \left. - \left(\xi_1 - \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\xi_2 - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right] : \mathrm{d}^2\xi\mathrm{d}^2\eta。 \end{aligned} \tag{4.92}$$

利用数学公式

$$\iint \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\delta(s-\lambda x'-\nu p')\exp[-(x'-x)^2-(p'-p)^2]$$

$$=\left\{\pi[(\lambda^2+\nu^2)]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{\lambda^2+\nu^2}(s-\lambda x-\nu p)^2\right]\right\}, \tag{4.93}$$

可见

$$R=\frac{1}{|\tau_1\tau_2|}:\exp\left\{-\frac{1}{|\tau_1|^2}\left[s_1-\frac{u_1(X_1-X_2)}{\sqrt{2}}-\frac{v_1(P_1+P_2)}{\sqrt{2}}\right]^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{|\tau_2|^2}\left[s_2-\frac{u_2(X_1+X_2)}{\sqrt{2}}-\frac{v_2(P_1-P_2)}{\sqrt{2}}\right]^2\right\}:, \tag{4.94}$$

式中 $\tau_i=u_i+\mathrm{i}v_i=|\tau|\exp(\mathrm{i}\varphi_i)$。此正规乘积正好是一个新的纯态密度算符：

$$R=|s_1,s_2;\tau_1,\tau_2\rangle\langle s_1,s_2;\tau_1,\tau_2|, \tag{4.95}$$

式中

$$|s_1,s_2;\tau_1,\tau_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{|\tau_1\tau_2|}}\exp\left\{-\frac{s_1^2}{2|\tau_1|^2}-\frac{s_2^2}{2|\tau_2|^2}\right.$$

$$+\left(\frac{s_1}{\tau_1^*}+\frac{s_2}{\tau_2^*}\right)a_1^\dagger+\left(-\frac{s_1}{\tau_1^*}+\frac{s_2}{\tau_2^*}\right)a_2^\dagger$$

$$+\frac{1}{2}[\exp(2\mathrm{i}\varphi_1)-\exp(2\mathrm{i}\varphi_2)]a_1^\dagger a_2^\dagger$$

$$-\frac{1}{4}[\exp(2\mathrm{i}\varphi_1)+\exp(2\mathrm{i}\varphi_2)]$$

$$\left.\cdot(a_1^{\dagger 2}+a_2^{\dagger 2})\right\}|0,0\rangle。 \tag{4.96}$$

(4.88)式与(4.95)式说明 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Radon 变换就是纯态密度算符 $|s_1,s_2;\tau_1,\tau_2\rangle\langle s_1,s_2;\tau_1,\tau_2|$，而且，

$$|\langle\psi|s_1,s_2;\tau_1,\tau_2\rangle|^2=\pi\iint\mathrm{d}^2\gamma\mathrm{d}^2\sigma\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle$$

$$\cdot\delta(s_1-u_1\eta_1-v_1\eta_2)\delta(s_2-u_2\xi_1-v_2\xi_2)。 \tag{4.97}$$

这说明对于纠缠态 $|\psi\rangle$，其 Wigner 函数的纠缠 Radon 变换正好是 $|\psi\rangle$ 在 $\langle s_1,s_2;\tau_1,\tau_2|$ 表象中波函数的模的平方。

作为练习，请有兴趣的读者求(4.88)式的逆 Radon 变换。

综上所述，可得出结论，对于纠缠态，不但其 Wigner 函数的边缘分布有新的含义，其相应的 Radon 变换也应该是纠缠的。

4.7 两体关联系统态矢的 Wigner 函数的时间演化[54]

由于密度算符 ρ 遵从海森堡方程 $\frac{\partial}{\partial t}\rho=-\mathrm{i}[H,\rho]$，由(4.16)式定义的 Wigner 函数对不同的哈密顿量随时间演化的方程形式也会不同。例如，当单粒子哈密顿量为

$$H=\frac{P_1^2}{2m}+V(X_1), \tag{4.98}$$

相应的 Wigner 函数的时间演化方程为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{m}p_1\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\mathrm{d}V(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\right]W(x,p,t)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2k}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{2k+1}V(X_1)}{\mathrm{d}x_1^{2k+1}}\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^{2k+1}\\&\quad\cdot W(x_1,p_1,t)。\end{aligned} \tag{4.99}$$

当 $\hbar\to0$，可看出此方程的经典极限是刘维方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{m}p_1\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\mathrm{d}V(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\right)W(x,p,t)=0。 \tag{4.100}$$

这里要问，当哈密顿量是一个两体关联系统

$$H=\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+U(X_1-X_2), \tag{4.101}$$

即位势仅依赖于两个粒子间的相对距离时，相应的 Wigner 函数的时间演化方程是什么？为解此问题，令

$$\begin{aligned}&X_r=X_1-X_2,\ P_r=\mu_2P_1-\mu_1P_2,\ P=P_1+P_2,\\&\mu_1=\frac{m_1}{M},\ \mu_2=\frac{m_2}{M},M=m_1+m_2,\ \mu=\frac{m_1m_2}{M}。\end{aligned} \tag{4.102}$$

把(4.101)式改写为

$$H=\frac{P^2}{2M}+\frac{P_r^2}{2\mu}+U(X_r),\tag{4.103}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle=&-\mathrm{i}\langle\sigma+\eta|\left[\frac{P_2}{2M}+\frac{P_r^2}{2\mu}+U(X_r)\right]\rho|\sigma-\eta\rangle\\&+\mathrm{i}\langle\sigma+\eta|\rho\left[\frac{P^2}{2M}+\frac{P_r^2}{2\mu}+U(X_r)\right]|\sigma-\eta\rangle。\end{aligned}\tag{4.104}$$

由(2.10)式可知

$$\begin{aligned}P_r|\eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2\rangle=&\exp(-\mathrm{i}\eta_1\eta_2)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p[\mu_2(p+\sqrt{2}\eta_2)+\mu_1p]\\&\cdot|p+\sqrt{2}\eta_2\rangle_1\otimes|-p\rangle_2\exp(-\mathrm{i}\sqrt{2}\eta_1p)\\=&\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\eta_1)}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1-\mu_2)\eta_2\right]|\eta\rangle。\end{aligned}\tag{4.105}$$

因此有

$$\langle\sigma+\eta|\frac{P_r^2}{2\mu}=\frac{1}{4\mu}\left[\frac{\mathrm{i}\partial}{\partial(\sigma_1+\eta_1)}+(\mu_1-\mu_2)(\sigma_2+\eta_2)\right]^2\langle\sigma+\eta|。\tag{4.106}$$

注意到

$$\langle\sigma+\eta|\frac{P^2}{2M}=\frac{(\sigma_2+\eta_2)^2}{M}\langle\sigma+\eta|,\tag{4.107}$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma_1\pm\eta_1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\pm\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right),\tag{4.108}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle=\left\{\frac{4\sigma_2\eta_2}{M}+\frac{\sigma_2\eta_2}{\mu}(\mu_1-\mu_2)^2\right.$$

$$-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}{2\mu}$$

$$
\cdot\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)+U[\sqrt{2}(\sigma_1+\eta_1)]
$$

$$
-U[\sqrt{2}(\sigma_1-\eta_1)]\Big\}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle, \tag{4.109}
$$

式中

$$
\frac{4}{M}+\frac{1}{\mu}(\mu_1-\mu_2)^2=\frac{1}{\mu}, \tag{4.110}
$$

而

$$
U[\sqrt{2}(\sigma_1+\eta_1)]-U[\sqrt{2}(\sigma_1-\eta_1)]
$$

$$
=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}(\sqrt{2}\eta_1)^{2k+1}\equiv A。 \tag{4.111}
$$

把(4.109)式代入下式

$$
\frac{\partial}{\partial t}W_\rho(\sigma,\gamma,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma) \tag{4.112}
$$

后再进行分部积分，得

$$
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}W_\rho(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp[2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\eta_1\gamma_2)]
$$

$$
\cdot\Big[\frac{\sigma_2\eta_2}{\mu}-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}{2\mu}
$$

$$
\cdot\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)+A\Big]\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle
$$

$$
=\Big\{-\frac{\mathrm{i}}{2\mu}\sigma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1}-\frac{\mathrm{i}\gamma_2}{2\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\frac{\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}{2\mu}\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)
$$

$$
+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left[\frac{\mathrm{i}\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right]^{2k+1}\Big\}
$$

$$
\cdot\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp[2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\eta_1\gamma_2)]\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle。 \tag{4.113}
$$

必须指出，当要讨论 Wigner 函数的演化方程经典极限时，必须纳入普朗克常数，即重写(4.111)式为

$$A=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hbar^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left(\frac{\sqrt{2}\eta_1}{\hbar}\right)^{2k+1},\quad(4.114)$$

同时，把（4. 112）式中的 $\exp[2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\eta_1\gamma_2)]$ 改写为 $\exp\left[\frac{2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\eta_1\gamma_2)}{\hbar}\right]$，于是 Wigner 函数的时间演化方程就变为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2\mu}[\sigma_2-(\mu_1-\mu_2)\gamma_2]\frac{\partial}{\partial\gamma_1}+\frac{1}{2\mu}[\gamma_2-(\mu_1-\mu_2)\sigma_2]\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)}\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right\}W_\rho(\sigma,\gamma,t)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left[\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right]^{2k+1}W_\rho(\sigma,\gamma,t)。$$

(4.115)

为了看清此方程的物理意义，注意到(4.72)式告诉我们

$$\begin{aligned}\gamma&=\alpha+\beta^*=\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2,\\ \gamma_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2),\\ \gamma_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1-p_2),\\ \sigma&=\alpha-\beta^*=\sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2,\\ \sigma_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2),\\ \sigma_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1+p_2),\end{aligned}\quad(4.116)$$

故有

$$\frac{1}{2\mu}[\sigma_2-(\mu_1-\mu_2)\gamma_2]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}\right),\quad(4.117)$$

$$\frac{1}{2\mu}[\gamma_2-(\mu_1-\mu_2)\sigma_2]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_2}{m_2}\right)。\quad(4.118)$$

因此，(4.115)式等价于

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1}+\frac{p_2}{m_2}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1}-\frac{p_2}{m_2}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right.
$$

$$
\left.-2\frac{\partial U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)}\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right]W_\rho(\sigma,\gamma,t)
$$

$$
=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left[\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right]^{2k+1}W_\rho(\sigma,\gamma,t), \tag{4.119}
$$

它与方程(4.99)式可以相比拟,也就是说,(4.119)式是以(4.116)式中的那些宗量来表达的。

在本章结尾处要指出,由于 Wigner 函数不总是正定的,于是人们引入 Husimi 函数以保证正定性,尽管其边缘分布的物理意义不太明确。用有序算符内的积分技术可以证明相应的 Husimi 算符恰好是一个纯压缩相干态密度算符,这为研究 Husimi 分布带来极大的便利;而对于双模情形,还可以引入纠缠形式的 Husimi 算符。

习　题

1. 求 Wigner 算符的 Radon 变换,并给出其物理解释。
2. 试对 Husimi 分布函数引入相应的 Husimi 算符,并给出其应用。
3. 证明相似变换下的 Weyl 编序不变性。

第五章

自旋相干态与纠缠态[56]

本章旨在用纠缠态表象重新审视自旋相干态(或原子相干态),发现其性质。

5.1 自旋相干态的 Schwinger 玻色子表示

从光子相干态概念人们自然会想到原子相干态(也称为自旋相干态,或从玻色子相干态想到自旋相干态)。自旋算符满足

$$[J_+,J_-]=2J_z,\quad [J_\pm,J_z]=\mp J_\pm。\tag{5.1}$$

仿照玻色子相干态,人们构造了自旋相干态(自旋值为 j)

$$\begin{aligned}|\tau\rangle&=\exp(\mu J_+-\mu^*J_-)\,|\,j,-j\rangle\\&=\exp(\tau J_+)\exp[J_z\ln(1+|\tau|^2)]\exp(-\tau^*J_-)\,|\,j,-j\rangle\\&=(1+|\tau|^2)^{-j}\exp(\tau J_+)\,|\,j,-j\rangle。\end{aligned}\tag{5.2}$$

μ 与 τ 的关系是

$$\mu=\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},\quad \tau=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\tan\frac{\theta}{2}。\tag{5.3}$$

在 j 值的自旋态 $|j,m\rangle$ 张成的子空间中,可以证明

$$\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,|\,\tau\rangle\langle\tau\,|=\sum_{m=-j}^{j}|\,j,m\rangle\langle j,m\,|=1,\tag{5.4}$$
$$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi。$$

自旋相干态是不正交的,其内积为

$$\langle\tau'\,|\,\tau\rangle=\frac{(1+\tau'\tau^*)^{2j}}{(1+|\tau|^2)^j(1+|\tau'|^2)^j}。\tag{5.5}$$

用(5.2)式可证$|\tau\rangle$满足以下方程：

$$
\begin{aligned}
(J_- + \tau^2 J_+)\,|\tau\rangle &= 2j\tau\,|\tau\rangle, \\
(J_- + \tau J_z)\,|\tau\rangle &= j\tau\,|\tau\rangle, \\
(\tau J_+ - J_z)\,|\tau\rangle &= j\,|\tau\rangle。
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

研究自旋系统可以用玻色算符及谐振子 Fock 态的方法。其中有一种称为 Schwinger 玻色子表示，即令

$$
J_+ = a^\dagger b,\ J_- = b^\dagger a,\ J_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b), \tag{5.7}
$$

相应的$|j,m\rangle$态表示为

$$
\begin{aligned}
|j,m\rangle &= \frac{(a^\dagger)^{j+m}(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\,|0,0\rangle \\
&= |j+m\rangle \otimes |j-m\rangle。
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

在双模 Fock 空间中，$|\tau\rangle$表示为

$$
\begin{aligned}
|\tau\rangle &= \exp(\mu J_+ - \mu^* J_-)\,|0\rangle \otimes |2j\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2j)!}}\left(b^\dagger \cos\frac{\theta}{2} + a^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j}\,|0,0\rangle \\
&= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\left[\frac{(2j)!}{l!(2j-l)!}\right]^{\frac{1}{2}}\tau^{2j-l}\,|2j-l\rangle \otimes |l\rangle。
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

在双模 Fock 空间中存在着一个扩展了的完备性：

$$
\sum_{2j=0}^{\infty}(2j+1)\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,|\tau\rangle\langle\tau| = 1,\ j = 0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots \tag{5.10}
$$

上式可以用 IWOP 技术证明：

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,|\tau\rangle\langle\tau| &= \frac{1}{(2j)!}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi :\left(b^\dagger\cos\frac{\theta}{2} + a^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j} \\
&\quad\cdot\left(b\cos\frac{\theta}{2} + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j}\exp(-a^\dagger a - b^\dagger b): \\
&= \frac{1}{2j+1}\frac{1}{(2j)!}:(a^\dagger a + b^\dagger b)^{2j}\exp(-a^\dagger a - b^\dagger b):。
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

代入(5.10)式求和即得证。

5.2　自旋相干态与纠缠态的内积

用双变数厄米特多项式的母函数公式,可将未归一化的纠缠态

$$\langle\zeta| = \langle 0,0|\exp(-ab + a\zeta + b\zeta^*) \tag{5.12}$$

展开为

$$\langle\zeta| = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a^m b^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\zeta^*), \tag{5.13}$$

所以

$$\langle\zeta|m,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\zeta^*)。 \tag{5.14}$$

由(5.9)式可见

$$\langle\zeta|\tau\rangle = \frac{\sqrt{(2j)!}}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\frac{\tau^{2j-l}\mathrm{H}_{2j-l,l}(\zeta,\zeta^*)}{l!(2j-l)!}。 \tag{5.15}$$

但我们并不满足于这个形式,而是希望能够进一步化简它。为此用双变数厄米特多项式的积分表达式

$$(-1)^n e^{\xi\eta}\int\frac{d^2z}{\pi}z^n z^{*m}\exp(-|z|^2 + \xi z - \eta z^*) = \mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta)。 \tag{5.16}$$

可以把 (5.15)式改写为

$$\begin{aligned}\langle\zeta|\tau\rangle &= \frac{\sqrt{(2j)!}}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}(-1)^l\exp(\zeta\zeta^*)\int\frac{d^2z(\tau z^*)^{2j-l}z^l}{\pi l!(2j-l)!} \\ &\quad\cdot\exp(-|z|^2 + \zeta z - \zeta^* z^*) \\ &= \frac{1}{(1+|\tau|^2)^j\sqrt{(2j)!}}\exp(\zeta\zeta^*)\int\frac{d^2z}{\pi}(\tau z^* - z)^{2j} \\ &\quad\cdot\exp(-|z|^2 + \zeta z - \zeta^* z^*)。\end{aligned} \tag{5.17}$$

为了积分上式,令

$$
\begin{aligned}
&z-\tau z^{*}=(1-|\tau|^{2})z',\\
&z=z'+\tau z'^{*},\\
&z^{*}=z'^{*}+\tau^{*}z',
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

从 $d^2z \to d^2z'$ 的雅科比行列式是

$$
d^2z=\frac{i}{2}dz\Lambda dz^{*}=(1-|\tau|^{2})d^2z',\tag{5.19}
$$

再令 $s=\zeta-\tau^{*}\zeta^{*}$，对(5.17)式积分，得到

$$
\begin{aligned}
\langle\zeta\mid\tau\rangle=&\frac{1}{(1+|\tau|^{2})^{j}\sqrt{(2j)!}}\exp(\zeta\zeta^{*})(1-|\tau|^{2})^{2j+1}\\
&\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2j}\int\frac{d^2z'}{\pi}\exp[-(1+|\tau|^{2})\mid z'\mid^{2}\\
&-\tau^{*}z'^{2}-\tau z'^{*2}+sz'-s^{*}z'^{*}]\\
=&\frac{\exp(\zeta\zeta^{*})(1-|\tau|^{2})^{2j}}{(1+|\tau|^{2})^{j}\sqrt{(2j)!}}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2j}\\
&\cdot\exp\left[\frac{-(1+|\tau|^{2})ss^{*}-\tau^{*}s^{*2}-\tau s^{2}}{(1-|\tau|^{2})^{2}}\right]。
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

注意到单变数厄米特多项式具有微商形式：

$$
H_n(x)=\exp(x^2)\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\exp(-x^2),\tag{5.21}
$$

并令

$$
\frac{\sqrt{\tau}s}{1-|\tau|^{2}}+\frac{1+|\tau|^{2}}{1-|\tau|^{2}}\frac{s^{*}}{2\sqrt{\tau}}\equiv\chi,\tag{5.22}
$$

则(5.20)式简写为

$$
\begin{aligned}
\langle\zeta\mid\tau\rangle=&\frac{\tau^{j}H_{2j}(\chi)}{(1+|\tau|^{2})^{j}\sqrt{(2j)!}}\exp\left[\zeta\zeta^{*}-\frac{\tau^{*}s^{*2}}{(1-|\tau|^{2})^{2}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1+|\tau|^{2}}{1-|\tau|^{2}}\frac{s^{*}}{2\sqrt{\tau}}\right)^{2}-\chi^{2}\right]。
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

注意到 $s=\zeta-\tau^{*}\zeta^{*}$，于是

$$
\frac{\zeta^{*}+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}=\chi,\tag{5.24}
$$

所以(5.23)式中的指数函数的[　]中的值恰为零，故得到了一个较为简洁的表示式

$$\langle\zeta\mid\tau\rangle=\frac{\tau^{j}}{(1+|\tau|^{2})^{j}\sqrt{(2j)!}}\mathrm{H}_{2j}\left(\frac{\zeta^{*}+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)。\quad(5.25)$$

上式说明自旋相干态(在玻色子实现下)在纠缠态$\langle\zeta|$表象下的波函数是一个阶为 $2j$ 的单变数厄米特多项式，这是一个易记忆也较优美的结果。(5.25)式也可以称为在 Schwinger 玻色实现下自旋相干态的一个广义的 Bargmann 表示。

5.3　自旋相干态的 Wigner 函数

作为(5.25)式的应用之一，下面求自旋相干态的 Wigner 函数。利用 Wigner 算符的纠缠态表示式(4.70)：

$$\int\frac{\mathrm{d}^{2}\zeta}{\pi^{3}}\|\gamma-\zeta\rangle\langle\gamma+\zeta\|\exp(\rho\zeta^{*}-\zeta\rho^{*})=\Delta(\gamma,\rho),\quad(5.26)$$

式中$\|\zeta\rangle=\exp\left(-\frac{|\zeta|^{2}}{2}\right)|\zeta\rangle$，$|\zeta\rangle$由(5.12)式定义，

$$\gamma=\alpha+\beta^{*},\quad\rho=\alpha-\beta^{*},\quad\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2}+\mathrm{i}p_{2})。$$

以下求

$$\begin{aligned}\langle\tau\mid\Delta(\gamma,\rho)\mid\tau\rangle=&\langle\tau\mid\int\frac{\mathrm{d}^{2}\zeta}{\pi^{3}}\|\gamma-\zeta\rangle\langle\gamma+\zeta\|\exp(\rho\zeta^{*}-\zeta\rho^{*})\mid\tau\rangle\\=&\frac{|\tau|^{2j}}{(2j)!(1+|\tau|^{2})^{2j}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\zeta}{\pi^{3}}\mathrm{H}_{2j}^{*}\left[\frac{(\gamma-\zeta)^{*}+\tau(\gamma-\zeta)}{2\sqrt{\tau}}\right]\\&\cdot\mathrm{H}_{2j}\left[\frac{(\gamma+\zeta)^{*}+\tau(\gamma+\zeta)}{2\sqrt{\tau}}\right]\\&\cdot\exp\left(-\frac{|\gamma-\zeta|^{2}+|\gamma+\zeta|^{2}}{2}+\rho\zeta^{*}-\zeta\rho^{*}\right)。\end{aligned}$$

(5.27)

进行积分变数变换 $\zeta\to\zeta'\equiv\dfrac{\zeta^*+\tau\zeta}{\sqrt{\tau}}$，其逆变换是 $\zeta=\sqrt{\tau^*}\dfrac{\zeta^{\prime *}-|\tau|\zeta'}{1-|\tau|^2}$，并令 $\gamma'\equiv\dfrac{\gamma^*+\tau\gamma}{\sqrt{\tau}}$，以及用

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\exp(tx-t^2)\Big|_{t=0},\tag{5.28}$$

可把(5.27)式改写为

$$\begin{aligned}\langle\tau\mid\Delta(\gamma,\rho)\mid\tau\rangle=&\frac{|\tau|^{2j}}{(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}}\exp(-|\gamma|^2)\frac{|\tau|}{1-|\tau|^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j}\\&\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{2j}\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta'}{\pi^3}\exp\Big[t(\gamma^{\prime *}-\zeta^{\prime *})+t'(\gamma'+\zeta')\\&-t^2-t'^2-\left|\sqrt{\tau^*}\frac{\zeta^{\prime *}-|\tau|\zeta'}{1-|\tau|^2}\right|^2+\rho\left(\sqrt{\tau}\frac{\zeta'-|\tau|\zeta^{\prime *}}{1-|\tau|^2}\right)\\&-\left(\sqrt{\tau^*}\frac{\zeta^{\prime *}-|\tau|\zeta'}{1-|\tau|^2}\right)\rho^*\Big]\Big|_{t=t'=0},\end{aligned}\tag{5.29}$$

式中的积分为

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta'}{\pi^3}\exp\Big[\frac{-(1+|\tau|^2)|\zeta'|^2+|\tau|(\zeta^{\prime *2}+\zeta^{\prime 2})}{(1-|\tau|^2)^2}|\tau|+\zeta'\Big(t'\\&+\frac{\sqrt{\tau}\rho}{1-|\tau|^2}+\frac{|\tau|\sqrt{\tau^*}\rho^*}{1-|\tau|^2}\Big)+\zeta^{\prime *}\left(-t-\frac{|\tau|\sqrt{\tau}\rho}{1-|\tau|^2}-\frac{\sqrt{\tau^*}\rho^*}{1-|\tau|^2}\right)\Big]\\=&\frac{1-|\tau|^2}{\pi^2|\tau|}\exp\left[t^2+t'^2-\frac{1+|\tau|^2}{|\tau|}tt'+\frac{1}{|\tau|}(wt+w^*t')-|\rho|^2\right],\end{aligned}\tag{5.30}$$

式中

$$\begin{aligned}&w=2|\tau|g-g^*(1+|\tau|^2)=\sqrt{\tau}(\tau^*\rho^*-\rho),\\&g=\frac{|\tau|}{1-|\tau|^2}\frac{\rho^*+\tau\rho}{\sqrt{\tau}}。\end{aligned}\tag{5.31}$$

把(5.30)式代入(5.29)式，并用双变数厄米特多项式的微商表达式(2.45)，可得 Wigner 函数：

$$W(\gamma,\rho)\equiv\langle\tau\mid\Delta(\gamma,\rho)\mid\tau\rangle=\frac{|\tau|^{2j}}{\pi^2(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}}$$

$$\cdot\exp(-|\gamma|^2-|\rho|^2)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{2j}$$

$$\cdot\exp\Big[-\frac{1+|\tau|^2}{|\tau|}tt'+\frac{1}{|\tau|}(wt+w^*t')$$

$$+t\gamma'^*+t'\gamma'\Big]\Big|_{t=t'=0}$$

$$=\frac{1}{\pi^2(2j)!}\exp(-|\gamma|^2-|\rho|^2)$$

$$\cdot H_{2j,2j}[\lambda(\rho'^*+\gamma'^*),\lambda(\rho'+\lambda')]$$

$$=\frac{1}{\pi^2(2j)!}\exp[-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)]$$

$$\cdot H_{2j,2j}\left(2\lambda\frac{\tau^*\alpha^*+\beta^*}{\sqrt{\tau^*}},2\lambda\frac{\tau\alpha+\beta}{\sqrt{\tau}}\right),\tag{5.32}$$

式中

$$\rho'=\frac{\tau\rho-\rho^*}{\sqrt{\tau}},\ \lambda^2=\frac{|\tau|}{1+|\tau|^2},\ \gamma'\equiv\frac{\gamma^*+\tau\gamma}{\sqrt{\tau}}。\tag{5.33}$$

可见在玻色表示下的自旋相干态 Wigner 函数是一个双变数厄米特多项式，其阶数为 $2j$。

5.4　自旋相干态的 Wigner 函数的边缘分布

根据(4.66)式，可得

$$\int d^2\rho W(\gamma,\rho)=\pi^{-1}\mid\langle\zeta\mid\Big|_{\zeta=\gamma}\mid\tau\rangle\mid^2,$$

$$\int d^2\gamma W(\gamma,\rho)=\pi^{-1}\mid\langle\eta\mid\Big|_{\eta=\rho}\mid\tau\rangle\mid^2。\tag{5.34}$$

用 $\gamma=\alpha+\beta^*,\rho=\alpha-\beta^*,\chi=\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(\zeta^*+\tau\zeta)$ 以及(5.23)式和(5.34)式，得到

$$\int d^2\rho W(\gamma,\rho)=\frac{1}{\pi^2(2j)!}\int d^2\rho\exp[-(|\gamma|^2+|\rho|^2)]$$
$$\cdot H_{2j,2j}\left[2\lambda\frac{\tau^*(\gamma^*+\rho^*)+\gamma-\rho}{\sqrt{\tau^*}},\right.$$
$$\left.2\lambda\frac{\tau(\gamma+\rho)+\gamma^*-\rho^*}{\sqrt{\tau}}\right]$$
$$=\pi^{-1}\exp(-|\gamma|^2)\left|C(\tau,j)H_{2j}\left(\frac{\gamma^*+\tau\gamma}{2\sqrt{\tau}}\right)\right|^2,\tag{5.35}$$

式中

$$C(\tau,j)\equiv\frac{\tau^j}{(1+|\tau|^2)^j\sqrt{(2j)!}}。$$

类似又可得

$$\int d^2\gamma W(\gamma,\rho)=\pi^{-1}\exp(-|\rho|^2)\left|C(\tau,j)H_{2j}\left(\frac{\tau^*\rho^*-\rho}{2\sqrt{\tau^*}}\right)\right|^2。\tag{5.36}$$

可见在 Schwinger 玻色表示下的原子相干态的 Wigner 函数的边缘分布分别是 γ 空间与 ρ 空间中的单模 $2j$ 阶厄米特多项式。(5.35)式与(5.36)式也可以看作是新的积分公式。

又从自旋相干态的内积

$$\langle\tau'\mid\tau\rangle=(1+|\tau|^2)^{-j}(1+|\tau'|^2)^{-j}(1+\tau'^*\tau)^{2j},\tag{5.37}$$

以及纠缠态 $|\zeta\rangle$ 的完备性关系和(5.25)式，可以导出

$$\langle\tau'\mid\tau\rangle=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\langle\tau'\|\zeta\rangle\langle\zeta\|\tau\rangle$$
$$=\frac{\tau'^{*j}\tau^j}{(2j)!(1+|\tau|^2)^j(1+|\tau'|^2)^j}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}$$
$$\cdot\exp(-\zeta^*\zeta)H^*_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau'\zeta}{2\sqrt{\tau'}}\right)H_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

对照(5.37)式可见

$$\int \frac{d^2\zeta}{\pi}\exp(-\zeta^*\zeta)H^*_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau'\zeta}{2\sqrt{\tau'}}\right)H_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)$$
$$=(2j)!(1+\tau'^*\tau)^{2j}(\tau'^*\tau)^{-j}。\tag{5.38}$$

可以从上式看出原子相干态的广义 Bargmann 空间中的基函数的正交关系。特别当在(5.38)式中取 $\tau'=\tau$ 时，有

$$\frac{|\tau|^{2j}}{(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\exp(-|\zeta|^2)\left|H_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)\right|^2=1。\tag{5.39}$$

5.5　原子相干态作为耦合振子的本征态[57]

两个耦合振子的哈密顿量是

$$H=\omega_1 a^\dagger a+\omega_2 b^\dagger b+\lambda(a^\dagger b+b^\dagger a)。\tag{5.40}$$

以前 Louisell 在 $\omega_1=\omega_2$ 时解此演化问题采用相干态表象[3]，结论是如果在初始时刻处于谐振子的双模相干态，那么在 t 时刻它仍处于同类的相干态。但是文献[3]中没有求当 $\omega_1\neq\omega_2$ 时 H 的本征态。这里采用纠缠态表象进行讨论。

设有确定自旋值的原子相干态 $|\tau\rangle$ 是 H 的本征态，

$$H|\tau\rangle=E|\tau\rangle。\tag{5.41}$$

利用(5.12)式，得

$$\langle\zeta|(a^\dagger+b)=\zeta\langle\zeta|,\quad \langle\zeta|(a+b^\dagger)=\zeta^*\langle\zeta|,\tag{5.42}$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\langle\zeta|=\langle\zeta|a,\quad \frac{\partial}{\partial\zeta^*}\langle\zeta|=\langle\zeta|b。\tag{5.43}$$

可知在 $\langle\zeta|$ 基下，

$$\begin{aligned}&a\to\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad a^\dagger\to\zeta-\frac{\partial}{\partial\zeta^*};\\&b\to\frac{\partial}{\partial\zeta^*},\quad b^\dagger\to\zeta^*-\frac{\partial}{\partial\zeta}。\end{aligned}\tag{5.44}$$

把它投影到 $\langle\zeta|$ 态表象，并用(5.12)式，得

$$\langle\zeta\mid H\mid\tau\rangle=\Big[\omega_1\Big(\zeta-\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\Big)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\omega_2\Big(\zeta^*-\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big)\frac{\partial}{\partial\zeta^*}$$
$$+\lambda\Big(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta^*}+\zeta^*\frac{\partial}{\partial\zeta}-\frac{\partial^2}{\partial\zeta^{*2}}-\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\Big)\Big]\langle\zeta\mid\tau\rangle。\tag{5.45}$$

上式右边代入(5.25)式,并用(5.24)式,又得

$$\langle\zeta\mid H\mid\tau\rangle=C(\tau,j)\Big[\Big(\omega_1\zeta\frac{\sqrt{\tau}}{2}+\omega_2\zeta^*\frac{1}{2\sqrt{\tau}}+\lambda\zeta\frac{1}{2\sqrt{\tau}}+\lambda\zeta^*\frac{\sqrt{\tau}}{2}\Big)$$
$$\cdot \mathrm{H}'_{2j}(\chi)-\frac{B}{4}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\mathrm{H}_{2j}(\chi)\Big],\tag{5.46}$$

式中

$$\chi=\frac{\zeta^*+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}},$$
$$B\equiv\omega_1+\omega_2+\frac{\lambda}{\tau}+\lambda\tau,\tag{5.47}$$
$$C(\tau,j)\equiv\frac{\tau^j}{(1+|\tau|^2)^j\sqrt{(2j)!}}。$$

用厄米特多项式的递推关系:

$$2\chi\mathrm{H}'_n(\chi)-2n\mathrm{H}_n(\chi)=\mathrm{H}''_n(\chi),\tag{5.48}$$

可以把(5.45)式整理为

$$\langle\zeta\mid H\mid\tau\rangle=C(\tau,j)\Big[\Big(\omega_1\zeta\frac{\sqrt{\tau}}{2}+\omega_2\zeta^*\frac{1}{2\sqrt{\tau}}+\zeta\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}$$
$$+\zeta^*\frac{\lambda\sqrt{\tau}}{2}-\frac{1}{2}B\chi\Big)\mathrm{H}'_{2j}(\chi)+Bj\,\mathrm{H}_{2j}(\chi)\Big]$$
$$=C(\tau,j)E\mathrm{H}_{2j}(\chi)。\tag{5.49}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}\mathrm{H}_{2j}(\chi)=4j\mathrm{H}_{2j-1}(\chi),\tag{5.50}$$

以及不同阶的厄米特多项式之间是相互正交的,所以(5.49)式中 H'_{2j} 的系数为零,即

$$\zeta\left(\omega_1\frac{\sqrt{\tau}}{2}+\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}-\frac{\sqrt{\tau}}{4}B\right)+\zeta^*\left(\frac{\omega_2}{2\sqrt{\tau}}+\frac{\lambda\sqrt{\tau}}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\tau}}B\right)=0 \tag{5.51}$$

对任意的 ζ 和 ζ^* 成立；此外，从(5.49)式又看出

$$Bj\,\mathrm{H}_{2j}(\chi)=E\mathrm{H}_{2j}(\chi)。 \tag{5.52}$$

从(5.51)中两个小括号中的系数分别为零所导致的自洽性要求：

$$\tau(\omega_1-\omega_2)+\lambda(1-\tau^2)=0, \tag{5.53}$$

其解为

$$\tau_\pm=\frac{(\omega_1-\omega_2)\pm\sqrt{(\omega_1-\omega_2)^2+4\lambda^2}}{2\lambda}。 \tag{5.54}$$

所以从(5.47)式与(5.52)式可知本征能量是

$$E=Bj=\left(\omega_1+\omega_2+\frac{\lambda}{\tau_\pm}+\lambda\tau_\pm\right)j$$

$$=(\omega_1+\omega_2\pm\sqrt{(\omega_1-\omega_2)^2+4\lambda^2})j, \tag{5.55}$$

相应的本征态是 $|\tau_\pm\rangle$，它们可以按 j 值来分类。例如，当 $\omega_1=\omega_2=\omega$，从(5.54)式知 $\tau_\pm=\pm1, E=2j(\omega\pm\lambda)$。进一步取 $j=\frac{1}{2}$，从(5.9)式知 H 的本征态是

$$|\tau_\pm\rangle\rightarrow|1_\pm\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm|1\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|1\rangle)。 \tag{5.56}$$

可以验证

$$H|1_+\rangle=(\omega+\lambda)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle+|0,1\rangle)。$$

耦合振子的本征态可以按自旋相干态来分类是一个值得关注的问题。

作为(5.25)式的第二个应用，求以下哈密顿量

$$H=DJ_-+D^*J_++CJ_z \tag{5.57}$$

的本征态及本征能量。设其本征态是自旋相干态 $|\tau\rangle$，能量本征值为 E，则在纠缠态表象 $|\zeta\rangle$ 中可建立方程

$$\langle\zeta \mid H \mid \tau\rangle\rangle = E\langle\zeta \mid \tau\rangle\rangle, \tag{5.58}$$

式中$|\tau\rangle\rangle$是未归一化的自旋相干态。根据(5.25)式可知

$$\langle\zeta \mid \tau\rangle\rangle = \frac{\tau^j}{\sqrt{(2j)!}} \mathrm{H}_{2j}(\chi),$$

$$\chi = \frac{\zeta^* + \tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}, \tag{5.59}$$

$$\langle\zeta \mid J_+ = \langle\zeta \mid a^+ b = \left(\zeta - \frac{\partial}{\partial\zeta^*}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\langle\zeta \mid。$$

由(5.59)式把(5.58)左边写为

$$\begin{aligned}
\langle\zeta \mid H \mid \tau\rangle\rangle &= \langle\zeta \mid [D(2j\tau - \tau^2 J_+) + D^* J_+ + C(\tau J_+ - j)] \mid \tau\rangle\rangle \\
&= (2j\tau D - jC)\langle\zeta \mid\mid \tau\rangle\rangle + (D^* - \tau^2 D + C\tau) \\
&\quad \cdot \langle\zeta \mid J_+ \mid \tau\rangle\rangle \\
&= \Big[2j\tau D - jC + (D^* - \tau^2 D + C\tau) \\
&\quad \cdot \left(\zeta^* - \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\Big] \frac{\partial}{\partial\zeta}\langle\zeta \mid \tau\rangle\rangle。
\end{aligned} \tag{5.60}$$

从(5.59)式可以看出

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\sqrt{\tau}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi},$$

以及

$$\begin{aligned}
\langle\zeta \mid H \mid \tau\rangle\rangle &= \Big[2j\tau D - jC + (D^* - \tau^2 D + C\tau) \\
&\quad \cdot \left(\zeta^* - \frac{\sqrt{\tau}\mathrm{d}}{2\mathrm{d}\chi}\right)\frac{\sqrt{\tau}\mathrm{d}}{2\mathrm{d}\chi}\Big]\langle\zeta \mid \tau\rangle\rangle \\
&= E\langle\zeta \mid \tau\rangle\rangle。
\end{aligned} \tag{5.61}$$

又由于$\frac{\mathrm{dH}_{2j}(\chi)}{\mathrm{d}\chi} = 4j\mathrm{H}_{2j-1}(\chi)$，并考虑到不同阶的厄米特多项式是相互正交的，要使(5.58)式成立，必须要求

$$D^* - \tau^2 D + C\tau = 0, \tag{5.62}$$

由此导出

$$\tau_{\pm}=\frac{C\pm\sqrt{C^2+4\mid D\mid^2}}{2D}。\tag{5.63}$$

能量本征值是

$$E_{\pm}=2jD\tau_{\pm}-jC=\pm j\sqrt{C^2+4\mid D\mid^2},\tag{5.64}$$

故而$|\tau_{\pm}\rangle$是 H 的本征态。

5.6 Pauli 自旋算符的粒子数态投影算符实现[58]

除了用双模玻色子算符来实现角动量算符及其 $SU(2)$代数关系外，还可以用单模玻色子 Fock 空间中的粒子态所组成的投影算符来实现 Pauli 自旋算符，它们是

$$\begin{aligned}\sigma_-&=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\rightarrow\sigma_-=\sum_{n=0}^{\infty}\mid 2n\rangle\langle 2n+1\mid,\\ \sigma_+&=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\sigma_+=\sum_{n=0}^{\infty}\mid 2n+1\rangle\langle 2n\mid,\end{aligned}\tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3=[\sigma_+,\sigma_-]&=\sum_{n=0}^{\infty}(\mid 2n+1\rangle\langle 2n+1\mid-\mid 2n\rangle\langle 2n\mid)\\ &=\sin^2\frac{\pi N}{2}-\cos^2\frac{\pi N}{2}=-\cos\pi N=-\frac{e^{i\pi N}+e^{-i\pi N}}{2}=(-1)^{N+1}。\end{aligned}\tag{5.66}$$

此表示式早在 1978 年即由 Shigefumi Naka 给出[59]。本节给出其推导如下：设 $\sigma_{\pm}$ 能用单模玻色算符表示为

$$\sigma_-=f(N)a,\ \sigma_+=a^{\dagger}f(N),\ N=a^{\dagger}a,\tag{5.67}$$

$f(N)$待定。则由$[a,a^{\dagger}]=1$ 及

$$f(N)a=af(N-1),\ a^{\dagger}f(N)=f(N-1)a^{\dagger}\tag{5.68}$$

可知

$$\sigma_-\sigma_+=(N+1)f^2(N),\ \sigma_+\sigma_-=a^{\dagger}f^2(N)a=Nf^2(N-1)。\tag{5.69}$$

把(5.67)式代入反对易关系：

$$\{\sigma_+,\sigma_-\}_+ = I, \tag{5.70}$$

得到

$$(N+1)f^2(N) + Nf^2(N-1) = I。 \tag{5.71}$$

由于 N 的本征值是 $0,1,2,\cdots$，上式的解为

$$(N+1)f^2(N) = \cos^{2l}\frac{\pi N}{2}, l = 1,2,\cdots, \tag{5.72}$$

这是由于

$$\cos^{2l}\frac{\pi N}{2} + \cos^{2l}\frac{\pi(N-1)}{2} = I。 \tag{5.73}$$

由此给出

$$f(N) = \frac{\cos^l\frac{\pi N}{2}}{\sqrt{N+1}}, \quad \sigma_- = \frac{\cos^l\frac{\pi N}{2}}{\sqrt{N+1}}a。 \tag{5.74}$$

当 $l=2$，由完备性关系 $\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1$，得到

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi N}{2} &= \frac{1}{2}(1+\cos\pi N)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\cos\pi n)|n\rangle\langle n|\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|2n\rangle\langle 2n|,\end{aligned} \tag{5.75}$$

再用 $\langle n|a = \sqrt{n+1}\langle n+1|$，就得到(5.65)式。

另一方面，当 $l=1$ 时，有

$$\cos\frac{\pi N}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{2}|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|2n\rangle\langle 2n|; \tag{5.76}$$

而当 $l=2k+1$ 时，有

$$\cos^{2k+1}\frac{\pi N}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|2n\rangle\langle 2n|\sum_{n'=0}^{\infty}|2n'\rangle\langle 2n'|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mid 2n\rangle\langle 2n \mid, \tag{5.77}$$

这时

$$\begin{aligned} \sigma_- &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mid 2n\rangle\langle 2n+1 \mid, \\ \sigma_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mid 2n+1\rangle\langle 2n \mid, \end{aligned} \tag{5.78}$$

而 σ_3 仍是$(-1)^{N+1}$。由 IWOP 技术可知

$$\sigma_3 = -:\exp(-2a^\dagger a):。 \tag{5.79}$$

用 Pauli 自旋算符的玻色子表示可以建立相应的自旋相干态。用分解公式

$$\exp(\xi\sigma_+ - \xi^*\sigma_-) = \exp(\tau\sigma_+)\exp[\sigma_z \ln(1+|\tau|^2)]\exp(-\tau^*\sigma_-), \tag{5.80}$$

式中 $\xi = \frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}, \tau = e^{-i\varphi}\tan\frac{\theta}{2}$。用(5.80)式可得到

$$\begin{aligned} \exp(\xi\sigma_+ - \xi^*\sigma_-) \mid 2n\rangle &= (1+|\tau|^2)\exp(\tau\sigma_+) \mid 2n\rangle \\ &= (1+|\tau|^2)(|2n\rangle + \tau \mid 2n+1\rangle) \\ &\equiv |\tau\rangle_n。 \end{aligned} \tag{5.81}$$

$|\tau\rangle_n$ 满足本征矢方程:

$$(\sigma_- + \tau^2\sigma_+) \mid \tau\rangle_n = \tau \mid \tau\rangle_n。 \tag{5.82}$$

对照(5.6)式,可见$|\tau\rangle_n$ 是自旋相干态,$j=\frac{1}{2}$。

用 Pauli 自旋算符的玻色子表示也可以研究一些光场量子态的行为,例如用于研究 Bell 不等式对于双模压缩态(是一种连续变量纠缠态)是否违背的问题。只要在 Bell 自旋算符

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{1z}\cos\theta_1 + (\sigma_{1-} + \sigma_{1+})\sin\theta_1,$$

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_{2z}\cos\theta_2 + (\sigma_{2-} + \sigma_{2+})\sin\theta_2$$

中代入两个 Pauli 自旋算符的玻色子表示,再计算在双模压缩态中的期望值:

$$\langle \text{双模压缩态} \mid \sigma_{\theta 1} \otimes \sigma_{\theta 2} \mid \text{双模压缩态} \rangle \equiv E(\theta_1, \theta_1),$$

就可以讨论 Bell 不等式的违背程度了。这个计算可供有兴趣的读者练习。

对于两个自旋算符,可以证明存在如下的 $SU(2)$ 代数[60]:

$$\begin{aligned}
&[\sigma_{1-}\sigma_{2-}, \sigma_{1+}\sigma_{2+}] = -2 \times \frac{1}{2}(\sigma_{1+}\sigma_{1-} + \sigma_{2+}\sigma_{2-} - 1), \\
&[\sigma_{1-}\sigma_{2-}, (\sigma_{1+}\sigma_{1-} + \sigma_{2+}\sigma_{2-} - 1)] = 2\sigma_{1-}\sigma_{2-}, \\
&[\sigma_{1+}\sigma_{2+}, (\sigma_{1+}\sigma_{1-} + \sigma_{2+}\sigma_{2-} - 1)] = -2\sigma_{1+}\sigma_{2+},
\end{aligned} \tag{5.83}$$

式中

$$\sigma_{1+}\sigma_{1-} + \sigma_{2+}\sigma_{2-} - 1 = \frac{1}{2}(\sigma_{1z} \otimes I + I \otimes \sigma_{2z})。 \tag{5.84}$$

所以导致以下的分解:

$$\exp(\xi\sigma_{1+}\xi_{2+} - \xi^*\sigma_{1-}\sigma_{2-}) = \exp(\tau\sigma_{1+}\sigma_{2+})\exp\left[\frac{1}{4}(\sigma_{1z} \otimes I + I \otimes \sigma_{2z})\ln(1 + |\tau|^2)\right]\exp(-\tau^*\sigma_{1-}\sigma_{2-})。 \tag{5.85}$$

由玻色表示(5.65)式得

$$\exp(\xi\sigma_{1+}\sigma_{2+} - \xi^*\sigma_{1-}\sigma_{2-}) \mid 0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\tau|^2}}(|0,0\rangle + \tau \mid 1,1\rangle) \equiv |\tau\rangle\rangle, \tag{5.86}$$

可证明它满足方程

$$(\sigma_{1-}\sigma_{2-} + \tau^2\sigma_{1+}\sigma_{2+}) \mid \tau\rangle\rangle = \tau \mid \tau\rangle\rangle, \tag{5.87}$$

及

$$\left[\sigma_{1-}\sigma_{2-} + \tau\frac{1}{4}(\sigma_{1z} \otimes I + I \otimes \sigma_{2z})\right] |\tau\rangle\rangle = \frac{1}{2}\tau \mid \tau\rangle\rangle。 \tag{5.88}$$

$\left(\text{注意}\frac{1}{4}(\sigma_{1z}\otimes I + I\otimes\sigma_{2z})|1,1\rangle = \frac{1}{2}|1,1\rangle。\right)$这说明 $|\tau\rangle\rangle$ 是 $j = \frac{1}{2}$ 的 $SU(2)$ 相干态。进而可证

$$\exp(\xi\sigma_{1+}\sigma_{2+}-\xi^*\sigma_{1-}\sigma_{2-})\,|\,1,0\rangle=|\,1,0\rangle,$$
$$\exp(\xi\sigma_{1+}\sigma_{2+}-\xi^*\sigma_{1-}\sigma_{2-})\,|\,0,1\rangle=|\,0,1\rangle,$$
$$\exp(\xi\sigma_{1+}\sigma_{2+}-\xi^*\sigma_{1-}\sigma_{2-})\,|\,1,1\rangle$$
$$=\exp(\tau\sigma_{1+}\sigma_{2+})\left(\sqrt{1+|\tau|^2}\,|\,1,1\rangle-\frac{\tau^*}{\sqrt{1+|\tau|^2}}\,|\,0,0\rangle\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}}(|\,1,1\rangle-\tau^*\,|\,0,0\rangle)。\tag{5.89}$$

习　　题

1. 试用有序算符内积分技术证明(5.37)式。

2. 求 $\exp(\lambda J_+)\exp(\sigma J_-)$的正规乘积展开式。

3. 求 $\exp(\lambda J_+-\lambda^* J_-)$的正规乘积展开与 Weyl 编序。

4. 试用将$|\tau\rangle$的(5.9)式直接代入两个耦合振子的定态薛定谔方程的办法求解能级。

5. 设两个耦合振子的哈密顿量是显含时间的，即

$$H=\omega_1(t)a^\dagger a+\omega_2(t)b^\dagger b+\lambda(t)(a^\dagger b+b^\dagger a),$$

试将$|\tau(t)\rangle f(t)$作为试探解，求薛定谔方程的解。

6. 用自旋相干态在纠缠态表象中的波函数重解第 5 题。

第六章

诱导纠缠态及其在汉克尔变换中的应用[61]、[62]

众所周知，傅里叶变换相应于量子力学中的坐标-动量表象变换，那么汉克尔变换对应什么表象之间的变换呢？本章旨在从EPR纠缠态导出新的纠缠态，并用量子力学的表象变换实现汉克尔变换，使得贝塞尔方程可用算符代数解之。

6.1 两类诱导纠缠态

从EPR纠缠态$|\eta\rangle$，可以导出另一类纠缠态，即

$$|q,r\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,|\,\eta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}。\tag{6.1}$$

把算符

$$Q\equiv a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2\tag{6.2}$$

作用于(2.3)式：

$$\begin{aligned}Q\,|\,\eta\rangle&=(\eta a_1^\dagger+\eta^* a_2^\dagger)\,|\,\eta\rangle=|\,\eta\,|\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}a_1^\dagger+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}a_2^\dagger)\,|\,\eta\rangle\\&=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\,|\,\eta\rangle,\end{aligned}\tag{6.3}$$

故有

$$Q\,|\,q,r\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\,|\,\eta=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rangle\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}=q\,|\,q,r\rangle。\tag{6.4}$$

对(6.1)式实行$\mathrm{d}\theta$的积分，并用双模厄米特多项式的母函数公式(3.128)，得到

$$|q,r\rangle=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\sum_{m,n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^{m+n}\frac{a_1^{\dagger m}a_2^{\dagger n}}{m!n!}$$

$$\cdot \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}\eta,-\mathrm{i}\eta^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}|0,0\rangle$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{m!n!}}\mathrm{H}_{m,n}(r,r)$$

$$\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(m-n-q)}|m,n\rangle$$

$$=\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{(n+q)!n!}}\mathrm{H}_{n+q,n}(r,r)|n+q,n\rangle。\tag{6.5}$$

从 Schmidt 分解的观点，可知$|q,r\rangle$是一个纠缠态。$|q,r\rangle$也满足另一个本征值方程：

$$(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)|q,r\rangle=r^2|q,r\rangle。\tag{6.6}$$

显然，

$$[Q,(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)]=0。\tag{6.7}$$

由$|\eta\rangle$的完备正交性，不难证明$|q,r\rangle$的完备正交性：

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r^2\,|q,r\rangle\langle q,r|=1,\tag{6.8}$$

$$\langle q,r|q',r'\rangle=\delta_{q,q'}\delta(r^2-r'^2)=\delta_{q,q'}\frac{1}{2r}\delta(r-r')。\tag{6.9}$$

另一方面，由(2.139)式表示的$|\zeta\rangle$态可以引进态矢：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,|\zeta=r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi}\equiv|s,r'\rangle。\tag{6.10}$$

用Q算符作用于$|\zeta\rangle$，得

$$Q|\zeta\rangle=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}|\zeta\rangle。\tag{6.11}$$

因此，

$$Q|s,r'\rangle=s|s,r'\rangle。\tag{6.12}$$

由

$$[Q,(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger)]=0,\tag{6.13}$$

可知$|s,r'\rangle$也满足本征值方程：

$$(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger)|s,r'\rangle=r'^2|s,r'\rangle。\tag{6.14}$$

对(6.10)式实行 $d\varphi$的积分，得到$|s,r'\rangle$的粒子态表示：

$$\begin{aligned}|s,r'\rangle&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\exp\left(-\frac{r'^2}{2}+\zeta a_1^\dagger+\zeta^*a_2^\dagger-is\varphi-a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|0,0\rangle\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r'^2}{2}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\dagger m}a_2^{\dagger n}}{m!n!}H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)e^{-is\varphi}|0,0\rangle\\&=\exp\left(-\frac{r'^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+s)!n!}}H_{n+s,n}(r',r')|n+s,n\rangle。\end{aligned}\tag{6.15}$$

可见$|s,r'\rangle$也是个纠缠态，其完备性与正交性是

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dr'^2|s,r'\rangle\langle s,r'|=1,\tag{6.16}$$

$$\langle s,r'|s',r''\rangle=\delta_{s,s'}\frac{1}{2r'}\delta(r'-r'')。\tag{6.17}$$

统称$|s,r'\rangle$与$|q,r\rangle$为 EPR 纠缠态的诱导纠缠态。下节中将给出其物理应用。

6.2 $\langle s,r'|q,r\rangle$作为汉克尔变换的积分核

利用$\langle\zeta|\eta\rangle$的内积值(2.140)式，可以计算矩阵元：

$$\begin{aligned}\langle s,r'|q,r\rangle&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d\varphi e^{is\varphi}\langle\zeta=r'e^{i\varphi}|\int_0^{2\pi}d\theta|\eta=re^{i\theta}\rangle e^{-iq\theta}\\&=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}e^{-iq\theta}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi e^{is\varphi}\exp\left[\frac{r'r(e^{-i(\varphi-\theta)}-e^{i(\varphi-\theta)})}{2}\right]。\end{aligned}\tag{6.18}$$

利用m阶贝塞尔函数

$$J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}\tag{6.19}$$

的母函数公式：

$$e^{ix\sin t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)e^{imt}, \tag{6.20}$$

得到

$$\begin{aligned}\langle s,r' \mid q,r\rangle &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iq\theta}e^{-is\varphi}\exp[irr'\sin(\theta-\varphi)]d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{is\varphi}e^{-iq\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(rr')\exp[im(\theta-\varphi)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta_{m,q}\delta_{m,s}J_m(rr') = \frac{1}{2}\delta_{s,q}J_s(rr')。\end{aligned} \tag{6.21}$$

在光学变换中，用贝塞尔函数 J_s 作为变换核的积分称为汉克尔变换，于是可知，相对于$\langle\zeta|\eta\rangle$这样一个复傅里叶变换而言，其诱导纠缠态的内积$\langle s,r'|q,r\rangle$是一个汉克尔变换的核。用完备性关系(6.8)式与(6.16)式，可以具体写出这种变换。记

$$\langle q,r \mid g\rangle = g(q,r),\ \langle s,r' \mid g\rangle = \mathcal{G}(s,r'), \tag{6.22}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(s,r') \equiv \langle s,r' \mid g\rangle &= \sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dr^2\langle s,r' \mid q,r\rangle\langle q,r \mid g\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} dr^2 J_s(rr')g(s,r) \equiv \mathcal{H}[g(s,r)]。\end{aligned} \tag{6.23}$$

可以看到 $\mathcal{G}(s,r')$恰为 $g(s,r)$的汉克尔变换。在量子力学框架内可将傅里叶变换看作是坐标表象$|x\rangle$与动量表象$|p\rangle$之间的变换，$\langle x|p\rangle$为变换核，

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mid x\rangle\langle x \mid p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \mid x\rangle e^{ipx}。\tag{6.24}$$

由此找到了数学中的汉克尔变换在量子力学中的对应，即诱导纠缠态$|q,r\rangle$与$|s,r'\rangle$之间的变换。(6.23)式的逆变换是

$$\begin{aligned}\langle q,r \mid g\rangle &= \sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dr'^2\langle q,r \mid s,r'\rangle\langle s,r' \mid g\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} dr'^2 J_s(rr')g(q,r') \equiv \mathcal{H}^{-1}[g(q,r')]。\end{aligned} \tag{6.25}$$

例如双模粒子数态$|n,n\rangle$与$\langle q,r|$及$\langle s,r'|$的内积是

$$
\begin{aligned}
\langle q,r \mid n,n\rangle &= \delta_{q,0}(-1)^n \frac{1}{n!}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{H}_{n,n}(r,r), \\
\langle s,r' \mid n,n\rangle &= \delta_{s,0} \frac{1}{n!}\exp\left(-\frac{r'^2}{2}\right)\mathrm{H}_{n,n}(r',r'),
\end{aligned} \tag{6.26}
$$

则从(6.23)式得到波函数$\langle q,r|n,n\rangle$的汉克尔变换是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\times(-1)^n\int_0^\infty \mathrm{d}r^2 \mathrm{J}_0(rr')\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{H}_{n,n}(r,r) \\
&=\exp\left(-\frac{r'^2}{2}\right)\mathrm{H}_{n,n}(r',r')。
\end{aligned} \tag{6.27}
$$

6.3 诱导纠缠态的上升、下降性质及汉克尔变换的若干性质

上节中重要关系$\langle s,r'|q,r\rangle=\frac{1}{2}\delta_{s,q}\mathrm{J}_s(rr')$还可以由贝塞尔函数的性质加以验证。由

$$
(a_1+a_2^\dagger)\mid s,r'\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \mid \zeta = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rangle r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi-\mathrm{i}s\varphi} = r' \mid s-1,r'\rangle, \tag{6.28}
$$

以及

$$
(a_1^\dagger+a_2)\mid s,r'\rangle = r' \mid s+1,r'\rangle, \tag{6.29}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_1-a_2^\dagger)\mid q,r\rangle &= r \mid q-1,r\rangle, \\
(a_1^\dagger-a_2)\mid q,r\rangle &= r \mid q+1,r\rangle,
\end{aligned} \tag{6.30}
$$

可以导出

$$
\langle s,r' \mid (a_1+a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2) \mid q,r\rangle = \frac{1}{2}r'r\delta_{s,q}\mathrm{J}_{s+1}(rr')。 \tag{6.31}
$$

把(6.6)式与(6.31)式合并得

$$\langle s,r' \mid (a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) \mid q,r\rangle = \frac{1}{2}\delta_{s,q}[r'r\mathrm{J}_{s+1}(rr') - (q+1)\mathrm{J}_s(rr')]。\tag{6.32}$$

另一方面，从(6.29)式及(6.30)式又得

$$\langle s,r' \mid (a_1^\dagger + a_2)(a_1 - a_2^\dagger) \mid q,r\rangle = \frac{1}{2}r'r\delta_{s,q}\mathrm{J}_{s-1}(rr')。\tag{6.33}$$

(6.31)式加上(6.33)式，导致

$$\langle s,r' \mid 2(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \mid q,r\rangle = \frac{1}{2}r'r\delta_{s,q}[\mathrm{J}_{s+1}(rr') + \mathrm{J}_{s-1}(rr')]。\tag{6.34}$$

又由(6.6)式看出

$$\langle s,r' \mid 2(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \mid q,r\rangle = s\delta_{s,q}\mathrm{J}_s(rr'),\tag{6.35}$$

由此导出

$$s\mathrm{J}_s(rr') = \frac{1}{2}r'r[\mathrm{J}_{s+1}(rr') + \mathrm{J}_{s-1}(rr')]。\tag{6.36}$$

这正好是贝塞尔函数的递推关系之一。

将(6.31)式减去(6.33)式，得

$$\begin{aligned}&\langle s,r' \mid 2(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2 + 1) \mid q,r\rangle\\ &= \frac{1}{2}r'r\delta_{s,q}[\mathrm{J}_{s+1}(rr') - \mathrm{J}_{s-1}(rr')],\end{aligned}\tag{6.37}$$

式中左边的算符与双模压缩算符

$$S(\lambda) \equiv \exp[\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2 + 1)] = \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} \left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta|, \mu = \mathrm{e}^\lambda\tag{6.38}$$

有关。由于 $S(\lambda)|\eta\rangle = |\frac{\eta}{\mu}\rangle, S(\lambda)|\zeta\rangle = |\mu\zeta\rangle$，故有

$$S(\lambda) \mid q,r\rangle = \left| q,\frac{r}{\mu}\right\rangle, S(\lambda) \mid s,r'\rangle = | s,\mu r'\rangle。\tag{6.39}$$

因此(6.37)式的左边

$$\langle s,r' \mid 2(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2 + 1) \mid q,r\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&=2\langle s,r'\mid\frac{\partial}{\partial\lambda}S(\lambda)\mid q,r\rangle\Big|_{\lambda=0}\\
&=2\langle s,r'\mid\frac{\partial}{\partial\lambda}\mid q,re^{-\lambda}\rangle\Big|_{\lambda=0}\\
&=\delta_{s,q}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathrm{J}_s(e^{-\lambda}rr')\Big|_{\lambda=0}\\
&=-\delta_{s,q}rr'\frac{\partial}{\partial(rr')}\mathrm{J}_s(rr')。
\end{aligned}\tag{6.40}
$$

比较(6.40)式与(6.37)式的右边，得到

$$
\frac{1}{2}[\mathrm{J}_{s+1}(rr')-\mathrm{J}_{s-1}(rr')]=-\frac{\partial}{\partial(rr')}\mathrm{J}_s(rr'),\tag{6.41}
$$

这与贝塞尔函数的另一性质

$$
\mathrm{J}_s'(z)=\frac{1}{2}[\mathrm{J}_{s-1}(z)-\mathrm{J}_{s+1}(z)]\tag{6.42}
$$

相吻合。可见$|s,r'\rangle$与$|q,r\rangle$的上升、下降性质与汉克尔变换中贝塞尔函数的性质符合得很好。从(6.23)式与(6.39)式可看到汉克尔变换具有以下的标度变换性：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}[g(s,\mu r)]&=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}r^2\mathrm{J}_s(rr')g(s,\mu r)\\
&=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \mathrm{d}r^2\langle s,r'\mid q,r\rangle\langle q,\mu r\mid g\rangle\\
&=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \mathrm{d}r^2\langle s,r'\mid S(\lambda)\mid q,\mu r\rangle\langle q,\mu r\mid g\rangle\\
&=\mu^{-2}\langle s,\frac{r'}{\mu}\mid g\rangle=\mu^{-2}\mathscr{G}(s,\frac{r'}{\mu})。
\end{aligned}\tag{6.43}
$$

综上所述，可以用量子力学的纠缠态来研究汉克尔变换，这样就进一步把光学中的成像变换与量子力学的若干内容相联系。类似这样的联系在以往的文献中也能见到，例如将光学的 Wigner 变换与量子力学 Wigner 函数相联系。在第八章中还将讨论分数汉克尔变换在量子力学中的体现。

6.4　贝塞尔方程作为量子力学中确定算符的恒等式在纠缠态表象中的矩阵元

贝塞尔方程和贝塞尔函数在解物理学问题和解工程学问题中经常被采用，尤其是当把亥尔姆霍兹方程在柱坐标或极坐标中展开时，相应的径向方程就是贝塞尔方程。另一方面，许多常用的积分也与贝塞尔函数有关。更重要的是，贝塞尔函数是傅里叶-贝塞尔变换的积分核（也被称为汉克尔变换）。本节将证明可以把贝塞尔方程看作一个确定的算符恒等式(6.45)在纠缠态表象中的矩阵元，这样就提供了贝塞尔方程的量子力学表示，并能用谐振子算符代数解之。

标准的贝塞尔方程是

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(x)+x\frac{d}{dx}J_\nu(x)+(x^2-\nu^2)J_\nu(x)=0。\quad(6.44)$$

算符恒等式是

$$(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2+1)^2+(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger)(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)$$
$$=(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2)^2。\quad(6.45)$$

(6.45)式的证明如下：由于

$$(a_1+a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)-(a_1^\dagger+a_2)(a_1-a_2^\dagger)=2(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2+1),$$
$$(a_1+a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)+(a_1^\dagger+a_2)(a_1-a_2^\dagger)=2(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2),$$
$$(6.46)$$

以及

$$[(a_1+a_2^\dagger),(a_1^\dagger+a_2)]=0,\quad[(a_1-a_2^\dagger),(a_1^\dagger-a_2)]=0,$$
$$[(a_1+a_2^\dagger),(a_1^\dagger-a_2)]=0,\quad[(a_1^\dagger+a_2),(a_1^\dagger-a_2)]=0,$$

$$(6.45)式的左边=\left[\frac{(a_1+a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)-(a_1^\dagger+a_2)(a_1-a_2^\dagger)}{2}\right]^2$$
$$+(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger)(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)$$
$$=\left[\frac{(a_1+a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)+(a_1^\dagger+a_2)(a_1-a_2^\dagger)}{2}\right]^2$$

$$=(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2)^2。\tag{6.47}$$

利用(6.6)式与(6.14)式可知（以下记$\langle s,r'|$态为$(s,r'|$），

$$(\nu,1\mid(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger)(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2)\mid\nu,x\rangle$$

$$=x^2(\nu,1\mid\nu,x\rangle,$$

$$[(\nu,1\mid\equiv\langle s'=\nu,r'=1],\tag{6.48}$$

$$(\nu,1\mid(a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2)^2\mid\nu,x\rangle=\nu^2(\nu,1\mid\nu,x\rangle。\tag{6.49}$$

由双模压缩算符的性质：

$$S(\lambda)\equiv\exp[\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2+1)]=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\mid\frac{\eta}{\mu}\rangle\langle\eta\mid$$

$$=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\mid\mu\zeta\rangle\langle\zeta\mid,\ \mu=e^\lambda,$$

可知

$$S(\lambda)\mid q,r\rangle=\mid q,\frac{r}{\mu}\rangle,\ S(\lambda)\mid s,r')=\mid s,\mu r'),$$

$$S(\lambda)\mid\nu,x\rangle=\mid\nu,\frac{x}{\mu}\rangle,\ S(\lambda)\mid\nu,1)=\mid\nu,\mu),$$

由此导出

$$(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2+1)^2\mid\nu,x\rangle$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\exp[\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2+1)]\big|_{\lambda=0}\mid\nu,x\rangle$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}S(\lambda)\mid\nu,x\rangle\big|_{\lambda=0}=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(\nu,1\mid\nu,xe^{-\lambda}\rangle\Big|_{\lambda=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[-xe^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial(xe^{-\lambda})}\right]\mid\nu,xe^{-\lambda}\rangle\Big|_{\lambda=0}$$

$$=\left[(xe^{-\lambda})^2\frac{\partial^2}{\partial(xe^{-\lambda})^2}+xe^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial(xe^{-\lambda})}\right]\mid\nu,xe^{-\lambda}\rangle\Big|_{\lambda=0}$$

$$=\left(x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}\right)\mid\nu,x\rangle。\tag{6.50}$$

结合(6.50)式和(6.45)式以及(6.48)式和(6.49)式，得到

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+(x^2-\nu^2)\right](\nu,1\mid\nu,x\rangle=0。\tag{6.51}$$

所以矩阵元$\langle\nu,1|\nu,x\rangle$恰为贝塞尔方程的解，这与(6.21)式一致。把 (6.45)式夹在$\langle\nu,1|$态与$|\nu,x\rangle$态之间就是(6.51)式，所以也可直接用量子力学的表象理论来引进贝塞尔方程。这正如也可以由谐振子哈密顿量的矩阵元

$$\langle x \mid \frac{1}{2}(P^2+X^2) \mid n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\langle x \mid n\rangle$$

来建立厄米特方程一样，这里$\langle x|n\rangle \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{H}_n(x)$，$\mathrm{H}_n(x)$是厄米特多项式。贝塞尔方程的算符恒等式与纠缠态表象导出方法指出了存在一组高阶微分方程也具有贝塞尔函数为其解的新思路，见 Fan Hongyi and Wang Yong 在 Commun. Theor. Phys 上将发表的文章。

在下例中将用到关系式：

$$\begin{aligned}
&[(a_1^\dagger a_1 - a_1 a_2 + 1)^2 - (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)^2] \mid \nu,x\rangle \\
&= (-a_1^\dagger + a_2)(a_1 + a_2^\dagger)(a_1 - a_2^\dagger)(a_1^\dagger - a_2) \mid \nu,x\rangle \\
&= -x^2(a_1^\dagger + a_2)(a_1 + a_2^\dagger) \mid \nu,x\rangle。
\end{aligned} \tag{6.52}$$

作为应用，以下求

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{\nu^2}{x^2}\right)|\nu,x\rangle \equiv -K(x) \tag{6.53}$$

的汉克尔变换。这类变换常用于解拉普拉斯方程(如热传导方程等)，即求

$$\int_0^\infty K(x)\mathrm{J}_\nu(x'x)x\mathrm{d}x。$$

通常的解法是用贝塞尔函数的递推关系对上式进行分部积分，工作量较大。现在改用(6.52)式，可以立即得到结果。注意到

$$-(a_1^\dagger + a_2)(a_1 + a_2^\dagger) \mid \nu,x\rangle = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{\nu^2}{x^2}\right)|\nu,x\rangle, \tag{6.54}$$

用(6.16)式，上式左边等于

$$(6.54)\text{ 式左边} = -\frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_2)(a_1 + a_2^\dagger)\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \mathrm{d}x'^2$$

$$\cdot | s,x')(s,x' | \nu,x\rangle$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^\infty dx'^2 J_\nu(xx')x'^2 | \nu,x')。\qquad(6.55)$$

把这看作是函数$-x'^2|\nu,x')$的汉克尔变换，则其逆变换是

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty dx^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\nu^2}{x^2}\right)| \nu,x\rangle J_\nu(xx')=-x'^2 | \nu,x')。\qquad(6.56)$$

这样就避免了较繁复的分部积分。

以上讨论引致对纠缠态$|\nu,x\rangle$的一些新的认识，即可以通过建立贝塞尔方程将其两个相互独立的量子数ν与x联系起来。

注意：如果用分部积分解，则须假定在分部积分的每一步骤在$x=0$与$x=\infty$的贡献都为零：

$$\int_0^\infty\left[\left(\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}-\frac{\nu^2}{x}\right)| \nu,x\rangle\right]J_\nu(x'x)dx$$
$$=-\int_0^\infty\left[x\frac{d| \nu,x\rangle}{dx}x'J_\nu'(x'x)+\frac{\nu^2}{x}| \nu,x\rangle J_\nu(x'x)\right]dx$$
$$=\int_0^\infty\left[x'^2 J''_\nu(x'x)+\frac{x'}{x}J_\nu'(x'x)-\frac{\nu^2}{x^2}J_\nu(x'x)\right]| \nu,x\rangle xdx,\qquad(6.57)$$

式中$J'(x'x)=\frac{d}{d(x'x)}J_\nu(x'x)$。用贝塞尔方程(6.44)式得

$$(6.56)式右边=-x'^2\int_0^\infty | \nu,x\rangle J_\nu(x'x)xdx=-x'^2 | \nu,x')。$$

6.5 诱导纠缠态表象应用于光线在(*ABCD*)介质中传播

在第三章3.5节中曾从三参数双模压缩算符的相干态表象导出广义菲涅耳变换的核（即(3.92)式）：

$$\langle\sigma | U(G) | \eta\rangle=\frac{1}{2iB}\exp\left\{\frac{i}{2B}[A | \eta|^2+D | \sigma|^2-(\eta\sigma^*+\eta^*\sigma)]\right\},$$

$$G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

式中$\langle\sigma|$也是EPR纠缠态，属于$\langle\eta|$系列。

令$\eta=|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，$\sigma=|\sigma|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，对方程(3.92)两边乘以两个相因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}$，并进行如下积分：

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'\theta}\langle\sigma=|\sigma|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|U(G)|\eta=|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}$$
$$=\frac{1}{8\mathrm{i}B\pi^2}\iint_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\exp(\mathrm{i}q'\theta-\mathrm{i}q\varphi)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2B}[A|\eta|^2+D|\sigma|^2\right.$$
$$\left.-2|\eta||\sigma|\cos(\varphi-\theta)]\right\}。\tag{6.58}$$

利用贝塞尔函数的母函数公式(6.20)，可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin t}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt},$$

则(6.58)式等于

$$\frac{1}{8\mathrm{i}\pi^3B}\iint_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\exp(\mathrm{i}q'\theta-\mathrm{i}q\varphi)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m\left(-\frac{|\eta||\sigma|}{B}\right)$$
$$\cdot\exp\left[\mathrm{i}m\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\theta\right)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(A|\eta|^2+D|\sigma|^2)\right]$$
$$=\frac{1}{2B\mathrm{i}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m\left(-\frac{|\eta||\sigma|}{B}\right)\mathrm{i}^m\delta(q'-m)\delta(m-q)$$
$$\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(A|\eta|^2+D|\sigma|^2)\right]$$
$$=\frac{\mathrm{i}^{q'-1}}{2B}\mathrm{J}_{q'}\left(-\frac{|\eta||\sigma|}{B}\right)\delta_{q',q}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(A|\eta|^2+D|\sigma|^2)\right]。\tag{6.59}$$

令$|\sigma|=r'$，$|\eta|=r$，则上式恰为

$$\langle q',r'|U(G)|q,r\rangle=\frac{\mathrm{i}^{q-1}}{2B}\mathrm{J}_q\left(-\frac{rr'}{B}\right)\delta_{q,q'}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(Ar^2+Dr'^2)\right]。\tag{6.60}$$

显然，它可以应用于光线在$(ABCD)$介质中传播的研究。

由(6.60)式、(3.92)式以及$U(G)$的成群规则，可以进一步计算

$$
\begin{aligned}
&\langle q,r''\mid U(G')U(G)\mid q,r\rangle \\
&=\langle q,r''\mid U(G')\sum_{q'=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'^2\mid q',r'\rangle\langle q',r'\mid U(G)\mid q,r\rangle \\
&=(-1)^q\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'^2\,\frac{1}{2\mathrm{i}B'}\,\frac{1}{2\mathrm{i}B}\mathrm{J}_q\left(-\frac{r'r''}{B'}\right)\mathrm{J}_q\left(-\frac{rr'}{B}\right) \\
&\quad\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B'}(A'r'^2+D'r''^2)+\frac{\mathrm{i}}{2B}(Ar^2+Dr'^2)\right] \\
&=\langle q,r''\mid U(G'')\mid q,r\rangle \\
&=\frac{\mathrm{i}^q}{2\mathrm{i}B''}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B''}(A''r^2+D''r''^2)\right]\mathrm{J}_q\left(-\frac{rr''}{B''}\right)。
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

由

$$
\begin{pmatrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}
$$

及(6.61)式，可看出关系：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'^2\mathrm{J}_q\left(-\frac{r'r''}{B'}\right)\mathrm{J}_q\left(-\frac{rr'}{B}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}B''r'^2}{2BB'}\right) \\
&=\frac{2\mathrm{i}BB'}{B''}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{Br''^2}{B''B'}+\frac{B'r^2}{B''B}+q\pi\right)\right]\mathrm{J}_q\left(-\frac{rr''}{B''}\right)。
\end{aligned}
\tag{6.62}
$$

可见广义汉克尔变换的群乘法规则可直接来源于菲涅耳算符的群乘法规则与诱导纠缠态表象理论。

以下两章将要着重讨论复分数傅里叶变换与相应的分数汉克尔变换，它们是G取一些特殊矩阵情况下的广义菲涅耳算符在纠缠态表象中的表示。

综上所述，有了纠缠态表象及相干态表象，并用有序算符内的积分技术，就可以用量子光学的变换论来重新审视傅里叶光学，从而得到一些新的结果。

习　题

1. 求波函数$\langle q,r|S(\lambda)|m,n\rangle$的汉克尔变换，$S(\lambda)|m,n\rangle$是双模压缩粒子态。

2. 求证贝塞尔函数的一个关于双变数厄米特多项式的展开式：

$$\frac{1}{2}\delta_{s,q}\mathrm{J}_s(rr')=\delta_{s,q}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{r'^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\sqrt{(n+s)!(n+q)!}}$$
$$\cdot\mathrm{H}_{n+q,n}(r,r)\mathrm{H}_{n+s,n}(r',r')。$$

3. 试从双变数的传统傅里叶变换出发：

$$F(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2\pi}\int f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r},$$
$$f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2\pi}\int F(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{k},$$

令$\boldsymbol{r}=(r,\theta)$，$\boldsymbol{k}=(k,\varphi)$，并把$f(r,\theta)$与$F(k,\varphi)$展开为傅里叶级数：

$$f(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$
$$F(k,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}。$$

求证：

$$F_n(k)=\int_0^{\infty}r\mathrm{d}r\,f_n(r)\mathrm{J}_n(kr),$$
$$f_n(r)=\int_0^{\infty}k\mathrm{d}k\,F_n(kr)\mathrm{J}_n(kr)。$$

4. 试用量子力学的方法证明上题。

5. 求证 Parseval 关系：

$$\int_0^{\infty}F_\nu(k)G_\nu(k)k\mathrm{d}k=\int_0^{\infty}f(x)g(x)x\mathrm{d}x,$$

式中$F_\nu(k)$与$G_\nu(k)$分别是f与g的ν阶汉克尔变换。

第七章

纠缠态与分数傅里叶变换

7.1 用 IWOP 技术研究分数傅里叶变换

学过衍射光学的人都知道，衍射孔的夫朗和费衍射和傅里叶变换（FFT）相对应，而在衍射孔到夫朗和费衍射区之间属于菲涅耳衍射光场分布，它必须用菲涅耳积分公式求解。近来有不少文章研究菲涅耳衍射与分数傅里叶变换（Fractional Fourier Transform）的关系，指出可将观察平面上的菲涅耳衍射分布看作是孔径平面上的光分布的某种分数傅里叶变换。人们发现，也可用透镜系统及梯度渐变介质（Graded Index Media）来实现分数傅里叶变换。[63]~[65]本章将用 IWOP 技术研究一维和二维分数傅里叶变换，使量子力学与信息光学的研究相互渗透[66]。

首先考察一维分数傅里叶变换，其定义是将实函数 $g(x)$ 通过下式变换为 $G(p)$：

$$F_\alpha[g(x)]=\sqrt{\frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{2\pi\sin\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(x^2+p^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{i}xp}{\sin\alpha}\right]g(x)\mathrm{d}x \equiv G(p), \tag{7.1}$$

式中 α 称为变换的阶。

为了把上式与量子力学的表象变换联系起来。将(7.1)式中的积分核左边乘上 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mid p\rangle$，右边乘上 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\langle x\mid$，然后用(1.15)式、(1.16)式和(1.17)式及 IWOP 技术积分，得

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}p \mid p\rangle \exp\left(\frac{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}p^2}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{i}xp}{\sin\alpha}\right)\langle x \mid$$

$$=(\sqrt{\pi})^{-1} :\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}p\exp\left(-\frac{p^2}{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}pa^\dagger+\frac{a^{\dagger 2}}{2}+\frac{\mathrm{i}x^2}{2\tan\alpha}+\frac{\mathrm{i}p^2}{2\tan\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{i}xp}{\sin\alpha}-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa-\frac{a^2}{2}+a^\dagger a\right):$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{i}\mathrm{ctg}\,\alpha}} :\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}p\exp\left\{-p^2+\mathrm{i}\sqrt{2}p\left[a^\dagger-\frac{a}{\sin\alpha(1-\mathrm{i}\mathrm{ctg}\,\alpha)}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a^{\dagger 2}}{2}-\frac{a^2}{2}\left[1-\frac{1}{(1-\mathrm{i}\mathrm{ctg}\,\alpha)}\right]-a^\dagger a\right\}:$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{i}\mathrm{ctg}\,\alpha}} : \exp[(\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-1)a^\dagger a]:$$

$$=\sqrt{2\pi \mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]。\qquad (7.2)$$

由完备性关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x \mid x\rangle\langle x \mid = 1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p \mid p\rangle\langle p \mid = 1,$$

可以看出

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}(x^2+p^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{i}xp}{\sin\alpha}\right]=\sqrt{2\pi \mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\langle p \mid \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]\mid x\rangle。\qquad (7.3)$$

所以从量子力学的表象变换来看，分数傅氏变换的积分核是 $\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]$ 在坐标表象 $|x\rangle$ 与动量表象 $\langle p|$ 之间的转换矩阵元。利用这一点很容易导出分数傅氏变换作为一种运算的本征模。先把(7.3)式代入(7.1)式，得

$$F_\alpha[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\langle p \mid \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]\mid x\rangle\langle x \mid g\rangle$$

$$=\langle p \mid \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]\mid g\rangle \equiv G(p),\qquad (7.4)$$

这意味着存在 $|G\rangle$ 态：

$$|G\rangle = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]|g\rangle。\tag{7.5}$$

取$|g\rangle$为粒子数态$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$，它的坐标表象波函数为

$$g(x) = \langle x \mid n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x),$$

其动量表象波函数是

$$\langle p \mid n\rangle = \frac{1}{i^n\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{p^2}{2}\right)H_n(p),$$

故$\langle x|n\rangle$的分数傅氏变换为

$$\begin{aligned} F_\alpha(\langle x \mid n\rangle) &= \langle p \mid \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]|n\rangle \\ &= i^n e^{-i\alpha n}\langle p \mid n\rangle, \end{aligned}\tag{7.6}$$

或

$$F_\alpha\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x)\right] = e^{-i\alpha n}\exp\left(-\frac{p^2}{2}\right)H_n(p)。\tag{7.7}$$

所以作为一种运算，F_α 的本征函数是厄米特-高斯函数，相应的本征值是 $e^{-i\alpha n}$。

可以用(7.3)式方便地导出分数傅里叶变换的群的“乘法”性质。在(7.3)式两边取复数共轭，得

$$\begin{aligned} &\exp\left[-\frac{i(x^2+p^2)}{2\tan\alpha}+\frac{ixp}{\sin\alpha}\right] \\ &= \sqrt{-2\pi i\sin\alpha e^{i\alpha}}\langle x \mid \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]|p\rangle, \end{aligned}\tag{7.8}$$

把 $\alpha\to-\alpha$，则上式变成

$$\begin{aligned} &\exp\left[\frac{i(x^2+p^2)}{2\tan\alpha}-\frac{ixp}{\sin\alpha}\right] \\ &= \sqrt{2\pi i\sin\alpha e^{-i\alpha}}\langle x \mid \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)a^{\dagger}a\right]|p\rangle。 \end{aligned}\tag{7.9}$$

从分数傅氏变换的定义式(7.1)和(7.9)，可见$G(p)$的β阶分数傅

氏变换是

$$F_\beta[G(p)]=\sqrt{\frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]}{2\pi\sin\beta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(x^2+p^2)}{2\tan\beta}-\frac{\mathrm{i}xp}{\sin\beta}\right]G(p)\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2\pi\mathrm{i}\sin\beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}\sqrt{\frac{\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]}{2\pi\sin\beta}}\int\mathrm{d}p\langle x|$$

$$\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)a^\dagger a\right]|p\rangle\langle p|G\rangle$$

$$=\langle x|\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)a^\dagger a\right]|G\rangle。\tag{7.10}$$

因此连续两次变换的结果是

$$F_\beta F_\alpha[g(x)]=F_\beta[G(p)]$$

$$=\langle x|\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)a^\dagger a\right]\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]|g\rangle$$

$$=\langle x|\exp[-\mathrm{i}(\alpha+\beta)a^\dagger a]|g\rangle。\tag{7.11}$$

鉴于

$$\exp(fa^\dagger a)a^\dagger\exp(fa^\dagger a)=e^fa^\dagger,\tag{7.12}$$

所以

$$\langle p|=\langle x||_{x=p}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)a^\dagger a\right]。\tag{7.13}$$

(7.11)式可变为

$$F_\beta F_\alpha[g(x)]=\langle p|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)a^\dagger a\right]|g\rangle$$

$$=F_{\beta+\alpha}[g(x)],\tag{7.14}$$

即 $g(x)$的连续两次分数傅氏变换(一为 α 阶,一为 β 阶)等价于($\alpha+\beta$)阶的一次变换,这是其群的性质。

作为(7.6)式的应用,以下求单模压缩真空态波函数的 α 阶分数傅氏变换。由于此态可用(1.3)式写成

$$\mathrm{S}|0\rangle=\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|x\mu\rangle\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\tag{7.15}$$

故

$$\langle x \mid S \mid 0\rangle = \mu^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\mu^2}\right), \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} F_\alpha[g(x)] &= \langle p \mid \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right] S \mid 0\rangle \\ &= \left(\sqrt{2\pi \mathrm{i}\sin\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right)^{-1}\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x \\ &\quad \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}(\mu^2x^2+p^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{i}xp\mu}{\sin\alpha}-\frac{x^2}{2}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{i}\sin\alpha+\mu^2\cos\alpha}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}-\mu^2\tan\alpha}{2(\tan\alpha-\mathrm{i}\mu^2)}p^2\right]。\end{aligned} \tag{7.17}$$

将来有望在某种光学仪器上实现这种变换。

7.2　用 Wigner 算符研究分数傅里叶变换[67]、[68]

分数傅氏变换理论最先由 Namias[52]在 1980 年提出，20 世纪 90 年代初该理论被引入到光学研究中，人们陆续提出用透镜系统或梯度折射率光波导来实现它[64]。后来 Lohmann 指出在光的成像转动、光信号的 Wigner 分布函数的转动及分数傅氏变换之间存在算法的同构(algorithmic isomorphism)[65]。本章将用上述量子力学表象变换的方法把 Wigner 函数与分数傅氏变换联系起来[68]。Wigner 算符的动量表象是

$$\Delta(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\left|p+\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle p-\frac{u}{2}\right|。 \tag{7.18}$$

按照(7.4)式，有分数傅氏变换式

$$G\left(p-\frac{u}{2}\right) = \left\langle p-\frac{u}{2}\right|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]\left| g\right\rangle, \tag{7.19}$$

$$G^*\left(p+\frac{u}{2}\right) = \langle g \mid \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^\dagger a\right]\left|p+\frac{u}{2}\right\rangle, \tag{7.20}$$

因此，$|G\rangle$态的 Wigner 函数可以写为

$$\begin{aligned}\langle G\mid\Delta(x,p)\mid G\rangle&=\int\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\langle G|p+\frac{u}{2}\rangle\langle p-\frac{u}{2}|G\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\langle g\mid\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]\\&\quad\cdot|p+\frac{u}{2}\rangle\langle p-\frac{u}{2}|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]|g\rangle\\&=\langle g\mid\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]\Delta(x,p)\\&\quad\cdot\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]|g\rangle。\end{aligned}\tag{7.21}$$

在第四章中曾指出 Wigner 算符的 Weyl 编序乘积是

$$\Delta(x,p)=\vdots\,\delta(x-X)\delta(p-P)\,\vdots,\tag{7.22}$$

式中记号$\vdots\quad\vdots$表示 Weyl 编序。在书Ⅱ中已作了证明，Weyl 编序的算符在相似变换下其编序不受影响，故有

$$\begin{aligned}&\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]\Delta(x,p)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)a^{\dagger}a\right]\\&=\vdots\,\delta(x-X\cos\alpha+P\sin\alpha)\delta(p-X\sin\alpha-P\cos\alpha)\,\vdots\\&=\Delta(x\cos\alpha+p\sin\alpha,\ -x\sin\alpha+p\cos\alpha)。\end{aligned}\tag{7.23}$$

代入到(7.21)式，得到

$$\langle G\mid\Delta(x,p)\mid G\rangle=\langle g\mid\Delta(x\cos\alpha-p\sin\alpha,x\sin\alpha+p\cos\alpha)\mid g\rangle。\tag{7.24}$$

上式表明态矢量$|g\rangle$的经α转动的 Wigner 函数正好是它的α阶分数傅里叶变换后的态$|G\rangle$的 Wigner 函数。Lohmann 正是用此性质来定义分数傅氏变换的。

7.3　用纠缠态之间的变换研究复的分数傅里叶变换

由(7.3)式可见，当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，它还原为熟知的傅里叶变换

$$\langle p \mid x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixp}。$$

互为共轭的两个 EPR 纠缠态$|\eta\rangle$与$\langle\zeta|$的内积为($|\eta\rangle$的形式见(2.3)式,$|\zeta\rangle$的形式见(2.139)式)

$$\langle\zeta \mid \eta\rangle = \frac{1}{2}\exp\left[\frac{1}{2}(\zeta^*\eta - \zeta\eta^*)\right], \tag{7.25}$$

它也是一种傅里叶变换。于是就很自然地联想到在纠缠态表象下研究复的分数傅氏变换,并分析它有什么新的性质和特点?这种变换的本征函数和本征值是什么?能否找到它的物理实现?是否也可以用 Wigner 函数的转动来定义它或研究它?更深入的问题关系到从$|\eta\rangle$与$|\zeta\rangle$分别导出的两种纠缠态表象之间的变换,第六章已证明这个变换是汉克尔变换,或者说已经找到汉克尔变换所对应的量子力学表象变换。这对于深入研究分数汉克尔变换的性质是有裨益的。

先计算指数算符$\exp[f(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)]$在$\langle\eta|$与$|\zeta\rangle$态之间的矩阵元,用(1.28)式得

$$\begin{aligned}
&\langle\eta \mid \exp[f(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)] \mid \zeta\rangle \\
&=\langle\eta \mid :\exp[(e^f - 1)(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)]: \mid \zeta\rangle \\
&=\int\frac{d^2\gamma}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\int\frac{d^2\gamma'}{\pi}\frac{d^2\beta'}{\pi}\langle\eta \mid \gamma,\beta\rangle\langle\gamma,\beta \mid \\
&\quad\cdot :\exp[(e^f - 1)(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)]: \mid \gamma',\beta'\rangle\langle\gamma',\beta' \mid \zeta\rangle \\
&=\int\frac{d^2\gamma}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}\int\frac{d^2\gamma'}{\pi}\frac{d^2\beta'}{\pi}\exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta^*\gamma - \eta\beta\right. \\
&\quad + \gamma\beta - |\gamma|^2 - |\beta|^2 - \frac{|\zeta|^2}{2} + \zeta\gamma'^* + \zeta^*\beta'^* - \gamma'^*\beta'^* \\
&\quad\left. - |\gamma'|^2 - |\beta'|^2 + e^f(\gamma^*\gamma' + \beta^*\beta')\right] \\
&=\frac{1}{1+e^{2f}}\exp\left[-\frac{|\eta|^2 + |\xi|^2}{2}\right. \\
&\quad\left. + \frac{e^f(|\eta|^2 + |\zeta|^2) + (\zeta\eta^* - \eta\zeta^*)}{e^{-f} + e^f}\right]。
\end{aligned} \tag{7.26}$$

式中已经用了双模相干态 $|\gamma,\beta\rangle$ 的超完备性关系。取 $f=\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，上式变为

$$\langle\eta|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]|\zeta\rangle$$
$$=\frac{1}{2\sin\alpha}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,|\eta|^2+|\zeta|^2}{2\tan\alpha}+\frac{\zeta\eta^*-\eta\zeta^*}{2\sin\alpha}\right)。\qquad(7.27)$$

特别当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，(7.27)式约化为(7.25)式。以下把(7.27)式的右边作为 α 阶复的分数傅里叶变换的积分核，即定义复函数 $g(\zeta)$ 的复的分数傅氏变换为 $F_\alpha[g(\zeta)]$，

$$F_\alpha[g(\zeta)]=\frac{1}{2\sin\alpha}\exp\left[\mathrm{i}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$\cdot\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\exp\left(\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta|^2)}{2\tan\alpha}+\frac{\zeta\eta^*-\zeta^*\eta}{2\sin\alpha}\right)g(\zeta)$$
$$\equiv G(\eta)。\qquad(7.28)$$

读者将会看到这样的定义不同于两个用(7.1)式表示的单变数分数傅氏变换的直积。为了证明复的分数傅氏变换的可加性，即证明

$$F_\beta\{F_\alpha[g(\zeta)]\}=F_{\beta+\alpha}[g(\zeta)],\qquad(7.29)$$

考察

$$F_\beta F_\alpha[g(\zeta)]=F_\beta[G(\eta)]=\frac{1}{2\sin\beta}\exp\left[\mathrm{i}\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$\cdot\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta'|^2)}{2\tan\beta}+\frac{\eta\zeta'^*-\eta^*\zeta'}{2\sin\beta}\right]G(\eta)$$
$$=\frac{1}{4\sin\alpha\sin\beta}e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta-\pi)}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta'|^2)}{2\tan\beta}+\frac{\eta\zeta'^*-\eta^*\zeta'}{2\sin\beta}\right]$$
$$\cdot\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta|^2)}{2\tan\alpha}+\frac{\zeta\eta^*-\zeta^*\eta}{2\sin\alpha}\right]g(\zeta)。$$
$$(7.30)$$

用三角函数恒等式

$$\cot\alpha-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=\cot\beta-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}=\cot(\alpha+\beta),$$

(7.30)式变为

$$\begin{aligned}F_\beta F_\alpha[g(\zeta)]=&\frac{1}{4\sin\alpha\sin\beta}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,|\,\zeta'\,|^2}{2\tan\beta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta-\pi)}\\&\cdot\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,|\,\zeta\,|^2}{2\tan\alpha}\right)g(\zeta)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\\&\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{i}\,|\,\eta\,|^2}{2}(\cot\beta+\cot\alpha)+\frac{\eta\zeta'^*-\eta^*\zeta'}{2\sin\beta}\right.\\&\left.+\frac{\zeta\eta^*-\zeta^*\eta}{2\sin\alpha}\right]\\=&\frac{1}{2\sin(\alpha+\beta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta-\pi)}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\,|\,\zeta'\,|^2}{2\tan(\alpha+\beta)}\right]\\&\cdot\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\,|\,\zeta\,|^2}{2\tan(\alpha+\beta)}+\frac{\mathrm{i}(\zeta'\zeta^*+\zeta\zeta'^*)}{2\sin(\alpha+\beta)}\right]g(\zeta)。\end{aligned}\tag{7.31}$$

令 $\zeta'\equiv\mathrm{i}\eta'$，$\zeta^{*\prime}=-\mathrm{i}\eta'^*$，则有 $\mathrm{i}(\zeta'\zeta^*+\zeta\zeta'^*)=\zeta\eta'^*-\zeta^*\eta'$，$|\zeta'|^2=|\eta'|^2$。参照定义式(7.28)，可见

$$F_\beta F_\alpha[g(\zeta)]=F_{\beta+\alpha}[g(\zeta)]=G_{\beta+\alpha}(\eta')。\tag{7.32}$$

说明前面定义的复的分数傅里叶变换也具有群的性质。

7.4 复的分数傅里叶变换的本征模[69]

(7.27)式的左边是复的分数傅里叶变换的积分核的量子力学"翻版"，它提供了用量子力学的表象变换来研究复的分数傅氏变换的新途径，即从纠缠态$\langle\zeta|g\rangle$与$\langle\eta|G\rangle$的变换，具体表达为

$$\begin{aligned}F_\alpha[g(\zeta)]=&\exp\left[\mathrm{i}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\&\cdot\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}\langle\eta\,|\,\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]|\,\zeta\rangle\langle\zeta\,|\,g\rangle\end{aligned}$$

$$=\langle\eta|\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)\right]|g\rangle\equiv G(\eta)。\tag{7.33}$$

令$G(\eta)\equiv\langle\eta|G\rangle$，则上式暗示着

$$|G\rangle=\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)\right]|g\rangle。\tag{7.34}$$

当取$|g\rangle$为双模 Fock 态$|m,n\rangle=\frac{a_1^{\dagger m}a_2^{\dagger n}}{\sqrt{m!\ n!}}|0,0\rangle$，则波函数$\langle\zeta|m,n\rangle$的复的分数傅氏变换为

$$\begin{aligned}F_\alpha(\langle\xi|m,n\rangle)&=\langle\eta|\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)\right]|m,n\rangle\\&=i^{n+m}e^{-i\alpha(m+n)}\langle\eta|m,n\rangle,\end{aligned}\tag{7.35}$$

式中$\langle\eta|$态在双模 Fock 空间中的展开为

$$\langle\eta|=\langle0,0|\sum_{m,n=0}^{\infty}i^{m+n}\frac{a_1^m a_2^n}{m!n!}H_{m,n}(-i\eta^*,i\eta)\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right),\tag{7.36}$$

所以

$$\langle\eta|m,n\rangle=\frac{i^{m+n}}{\sqrt{m!n!}}H_{m,n}(-i\eta^*,i\eta)\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)。\tag{7.37}$$

而$\langle\zeta|$在双模 Fock 空间中展开为

$$\begin{aligned}\langle\zeta|&=\langle0,0|\exp\left(-a_1a_2+a_1\zeta+a_2\zeta^*-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\\&=\langle0,0|\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a_1^m a_2^n}{m!n!}H_{m,n}(\zeta^*,\zeta)\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right),\end{aligned}\tag{7.38}$$

故而

$$\langle\zeta|m,n\rangle=\frac{1}{\sqrt{m!n!}}H_{m,n}(\zeta',\zeta)\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)。\tag{7.39}$$

把(7.37)式与(7.39)式代入(7.35)式，可看出

$$F_\alpha\left[\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)\right]$$

$$=(-e^{-i\alpha})^{m+n}\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)H_{m,n}(-i\eta^*,i\eta)。\qquad(7.40)$$

如果把运算(进行复的分数傅氏变换)F_α 看成是一个算符,就可以说 F_α 的本征函数是双变数厄米特多项式 $H_{m,n}$,相应的本征值是 $(-e^{-i\alpha})^{m+n}$。

在 7.5 节将证明这样的本征模也存在于光在二次渐变折射率介质中传播的过程中。

另一方面,由于 $H_{m,n}(\zeta,\zeta^*)$ 的正交性和完备性,作为复的分数傅里叶变换的本征函数集也是完备和正交的。

7.5　光在二次渐变折射率介质中传播的本征模(Ⅰ)

二次渐变折射率介质的定义是

$$n(r)=n_1-\frac{n_2r^2}{2},\ n^2(r)\approx n_1^2-n_1n_2r^2,\qquad(7.41)$$

式中 r 是从光轴 z 量起的到介质中某点的径向距离,(n_1,n_2)是介质的物理参数。在文献[70]中指出:如果在垂直于光轴的平面上强度分布为 $f(x,y)$的光从左向右自 $z=0$ 起入射,那么在位置

$$z=\frac{2\alpha L}{\pi},\quad L\equiv\frac{\pi}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(7.42)$$

处,就可以观察到 $f(x,y)$的 α 阶分数傅里叶变换。其证明如下。为简单计,先只考虑光的一维电场 $E(x,z)=E(x)\exp(ik_zz)$沿 z 方向在二次渐变介质中传播,传播方程是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_x^2+k_z^2\right)E(x,z)$$
$$=\exp(ik_zz)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_x^2\right)E(x)=0,\qquad(7.43)$$

式中 k_x 是 x 方向上的波矢,$k_x^2=k^2-k_z^2$, $k=nk_0$,k_0 是真空中的波矢,把这些关系代入(7.43)式,得到

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(n_1^2k_0^2-n_1n_2k_0^2x^2-k_z^2)\right]E(x)=0。\tag{7.44}$$

令

$$\zeta=\varepsilon x,\quad \varepsilon^2=\sqrt{n_1n_2}k_0,\quad v\equiv\frac{1}{\varepsilon^2}(n_1^2k_0^2-k_z^2),\tag{7.45}$$

(7.44)式简化为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+(v-\zeta^2)\right]E=0,\tag{7.46}$$

其形式如同谐振子的薛定谔方程，所以其本征函数是厄米特-高斯函数

$$E\sim\exp(-\zeta^2)\mathrm{H}_n(\zeta),n=0,1,2,\cdots\tag{7.47}$$

本征值是

$$v=2\left(n+\frac{1}{2}\right)。$$

由(7.45)式可见

$$\begin{aligned}k_z&=n_1k_0\left[1-(2m+1)\frac{1}{n_1k_0}\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\approx k_1-\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\left(m+\frac{1}{2}\right),\quad k_1\equiv n_1k_0,\end{aligned}\tag{7.48}$$

可将 k_1 理解为是在折射率为 n_1 的均匀介质中的传播常数。当取传播距离为(7.42)式所示的位置，一维电场分布为

$$\begin{aligned}E(x,z)&\sim\exp(-\zeta^2)\mathrm{H}_n(\zeta)\exp(\mathrm{i}kz)\\&=\exp(-\zeta^2)\mathrm{H}_n(\zeta)\exp\left\{\mathrm{i}\alpha\left[k_1\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]-\mathrm{i}\alpha m\right\}。\end{aligned}\tag{7.49}$$

除去一个不重要的相因子 $\exp\left\{\mathrm{i}\alpha\left[k_1\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]\right\}$外，从(7.49)式看出光在二次渐变折射率介质中传播到一定距离 $z=\frac{2\alpha L}{\pi}$处的本征值与 α 阶分数傅里叶变换的本征值相同，都是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha m}$，本征模都是单变量的厄米特-高斯函数。把这个结论推广到 α 维电场的传

播，则其本征模为两个单变量厄米特多项式的直积 $\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_{m'}(y)$，相应的本征值是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(m+m')}$。在下一节中将看到还存在其他形式的本征态。

7.6 光在二次渐变折射率介质中传播的本征模(Ⅱ)[71]

本节要证明在这种介质中光的传播还存在着以双变量厄米特多项式为本征模。对照 7.3 节可知，复的分数傅里叶变换也可以在光在二次渐变折射率介质的传播中得到实现，这是以往的文献所没有注意到的。为了说明这一点，写下光传播在二维情况下的本征方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E(x,y)+[n_1^2k_0^2-n_1n_2k_0^2(x^2+y^2)-k_z^2]E(x,y)=0。\tag{7.50}$$

令

$$\xi=\varepsilon x,\quad \eta=\varepsilon y,\quad \varepsilon^2=\sqrt{n_1n_2}k_0,\quad v=\frac{1}{\varepsilon^2}(n_1k_0^2-k_2^2),$$

则(7.50)式变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)E+[v-(\xi^2+\eta^2)]E=0。\tag{7.51}$$

引入

$$\begin{aligned}\zeta&=\frac{\xi+\mathrm{i}\eta}{\sqrt{2}},\\ \zeta^*&=\frac{\xi-\mathrm{i}\eta}{\sqrt{2}},\\ \frac{\partial}{\partial\xi}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\right),\\ \frac{\partial}{\partial\eta}&=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\right),\end{aligned}\tag{7.52}$$

(7.51)式进而化为

$$2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^*\partial\zeta}E+(v-2\zeta^*\zeta)E=0。\tag{7.53}$$

设 $E(x,y)$ 有以下形式的解：

$$E(x,y)=f(\zeta',\zeta'^*)\exp(-\zeta^*\zeta),\zeta'=\sqrt{2}\zeta,\zeta'^*=\sqrt{2}\zeta^*。\tag{7.54}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\zeta^*)=m\mathrm{H}_{m-1,n}(\zeta,\zeta^*),\\&\frac{\partial}{\partial\zeta^*}\mathrm{H}_{m,n}=n\mathrm{H}_{m,n-1},\end{aligned}\tag{7.55}$$

方程(7.53)最后变为

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta'^*\partial\zeta'}-\zeta'^*\frac{\partial f}{\partial\zeta'^*}-\zeta'\frac{\partial f}{\partial\zeta'}+\left(\frac{v}{2}-1\right)f=0。\tag{7.56}$$

取 f 为 $f=\mathrm{H}_{m,n}(\zeta',\zeta'^*)$，由(3.145)式和(7.56)式知

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta'^*\partial\zeta'}-\zeta'^*\frac{\partial f}{\partial\zeta'^*}+nf=0,\\&\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta'^*\partial\zeta'}-\zeta'\frac{\partial f}{\partial\zeta'}+mf=0。\end{aligned}\tag{7.57}$$

对照(7.51)式，看出其本征值为

$$v=2(m+n+1),\quad m,n=0,1,2,3,\cdots\tag{7.58}$$

再从(7.45)式与(7.48)式看出

$$\begin{aligned}k_z&=k_1\left[1-2(m+n+1)\frac{1}{k_1}\sqrt{\frac{n_2}{n_2}}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\approx k_1-\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}(m+n+1)。\end{aligned}\tag{7.59}$$

当光从 $z=0$ 处传播到距离为 $z=\frac{2\alpha L}{\pi}$，$L=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$ 处，电场为

$$\begin{aligned}E_{m,n}(x,y,z)&=E_{m,n}(x,y)\exp(\mathrm{i}k_z z)\\&=C\mathrm{H}_{m,n}(\zeta',\zeta'^*)\exp(-\zeta^*\zeta)\end{aligned}$$

$$\cdot \exp\left[\frac{ik_1 2\alpha L}{\pi} - i\alpha - i\alpha(m+n)\right], \tag{7.60}$$

式中 C 是一个归一化常数。(7.60)式表明双变量厄米特多项式也是光在二次渐变折射率介质中传播的解，在 $z=\frac{2\alpha L}{\pi}$ 处，相应的本征值与复的分数傅里叶运算的本征值相同，都是 $e^{-i\alpha(m+n)}$。这表明复的分数傅氏变换也具有物理背景。本节内容还可用于研究光在二次渐变介质中传播的泰保(Talbot)效应。

7.7　从 Wigner 算符的 Weyl 编序形式导出复的分数傅里叶变换

本节讨论如何由(4.85)式看出复的分数傅氏变换的引入是必然的结果。对(4.85)式作以下幺正变换并注意到幺正变换不干扰 Weyl 编序，得到

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)\Delta(\sigma,\gamma)\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)\\
&=\exp\left(-i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)\vdots\,\delta^{(2)}(\gamma-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\sigma-a_2^\dagger-a_1)\,\vdots\\
&\quad\cdot\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)\\
&=\vdots\,\delta^{(2)}(\gamma-a_1e^{i\theta}+a_2^\dagger e^{-i\theta})\delta^{(2)}(\sigma-a_2^\dagger e^{-i\theta}-a_1e^{i\theta})\,\vdots\\
&=\vdots\,\delta^{(2)}\left[\begin{pmatrix}\sigma\\ \gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta & i\sin\theta\\ i\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2^\dagger+a_1\\ a_1-a_2^\dagger\end{pmatrix}\right]\vdots\\
&=\vdots\,\delta^{(2)}\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & -i\sin\theta\\ -i\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_2^\dagger+a_1\\ a_1-a_2^\dagger\end{pmatrix}\right]\vdots\,。\\
&=\Delta(\sigma\cos\theta-i\gamma\sin\theta,\gamma\cos\theta-i\sigma\sin\theta)。
\end{aligned} \tag{7.61}$$

由此导出

$$\langle\psi\mid\Delta(\sigma\cos\theta-i\gamma\sin\theta,\gamma\cos\theta-i\sigma\sin\theta)\mid\psi\rangle$$

$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\langle\psi|\exp\left(-i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta|$$

$$\cdot\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|\psi\rangle\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)。\tag{7.62}$$

令

$$|G\rangle\equiv\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|\psi\rangle,\tag{7.63}$$

它的 Wigner 函数是

$$W_{|G\rangle}(\sigma,\gamma)=\langle G|\Delta(\sigma,\gamma)|G\rangle。\tag{7.64}$$

则由$|\zeta\rangle$态的完备性得

$$G(\eta)\equiv\langle\eta|G\rangle=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}\langle\eta|\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|\zeta\rangle\langle\zeta|\psi\rangle。\tag{7.65}$$

将上式看作是把波函数$\langle\zeta|\psi\rangle$变换为$G(\eta)$的一个变换式，那么矩阵元$\langle\eta|\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|\zeta\rangle$就是这个积分变换的核，前面已在(7.26)式中计算了它，它也是复的分数傅里叶变换的积分核。由(7.63)式可知

$$\langle\sigma+\eta|\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|f\rangle=G(\sigma+\eta),\tag{7.66}$$

$$\langle f|\exp\left(-i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|\sigma-\eta\rangle=\left[\langle\sigma-\eta|\exp\left(i\theta\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i\right)|f\rangle\right]^*$$

$$=G^*(\sigma-\eta)。\tag{7.67}$$

把(7.66)式与(7.67)式代入(7.62)式，得

$$\langle\psi|\Delta(\sigma\cos\theta-i\gamma\sin\theta,\gamma\cos\theta-i\sigma\sin\theta)|\psi\rangle$$

$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}G^*(\sigma-\eta)G(\sigma+\eta)\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)。\tag{7.68}$$

与标准的 Wigner 变换式相对照，可见这是$G(\eta)$的一个复域的 Wigner 变换。方程(7.68)说明态$|\psi\rangle$在旋转的相空间中的 Wign-

er 函数等于 $G(\eta)$ 的复 Wigner 变换，而 $G(\eta)$ 是 $\psi(\zeta)$ 的分数傅里叶变换。这样就看出复的分数傅里叶变换是复的 Wigner 变换的一个自然的结果。

7.8 角动量算符的新玻色算符实现和纠缠态之间的分数傅里叶变换[72]

本节将阐述分数傅氏变换也可以用角动量算符的一种新玻色算符实现与纠缠态表象导出。受角动量的 Schwinger 玻色子表示[73]的启发，可看出满足角动量算符的基本对易关系

$$[J_-,J_+]=-2J_0,\quad [J_-,J_0]=J_-,\quad [J_+,J_0]=-J_+ \tag{7.69}$$

的玻色算符也可以取

$$\begin{aligned} J_+&=\frac{1}{2}(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2),\\ J_-&=\frac{1}{2}(a_1^\dagger+a_1)(a_1+a_2^\dagger),\\ J_0&=\frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)。\end{aligned} \tag{7.70}$$

事实上，观察到

$$\begin{aligned} &[(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2),(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger)]=4(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2),\\ &[(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2),(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)]=-2(a_1-a_2^\dagger)(a_1^\dagger-a_2),\\ &[(a_1^\dagger+a_2)(a_1+a_2^\dagger),(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)]=2(a_1^\dagger+a_2)(a_2^\dagger+a_1),\end{aligned} \tag{7.71}$$

可见(7.70)式是正确的角动量表示，但要注意这里的 J_+ 与 J_- 不是互为厄米特共轭的算符。考察以下指数型算符：

$$\exp(\zeta J_+-\zeta^*J_-)=e^{\tau J_+}\exp[J_0\ln(1+|\tau|^2)]e^{-\tau^*J_-}, \tag{7.72}$$

这个分解式是不难证明的，式中

$$\zeta=\theta e^{-i\varphi},\quad \tau=e^{-i\varphi}\tan\theta,\quad 1+|\tau|^2=\sec^2\theta。 \tag{7.73}$$

特别当 ζ 是纯虚的，$\zeta=\mathrm{i}\theta=\theta\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tau=\mathrm{i}\tan\theta$，(7.72)式化为

$$\exp[\mathrm{i}\theta(J_{+}+J_{-})]=\exp(\mathrm{i}J_{+}\tan\theta)\exp(J_{0}\ln\sec^{2}\theta)\exp(\mathrm{i}J_{-}\tan\theta)。$$

另一方面，由(7.70)式可得

$$J_{+}+J_{-}=a_{1}^{\dagger}a_{1}+a_{2}^{\dagger}a_{2}+1。\tag{7.74}$$

所以，

$$\exp[\mathrm{i}\theta(a^{\dagger}a+b^{\dagger}b+1)]=\exp\left[\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(a_{1}-a_{2}^{\dagger})(a_{1}^{\dagger}-a_{2})\tan\theta\right]$$
$$\cdot\exp\left[\frac{1}{2}(a_{1}^{\dagger}a_{2}^{\dagger}-a_{1}a_{2})\ln\sec^{2}\theta\right]$$
$$\cdot\exp\left[\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(a_{1}^{\dagger}+a_{2})(a_{1}+a_{2}^{\dagger})\tan\theta\right]。$$

由纠缠态(2.7)式及(2.139)式，可知

$$\langle\eta|(a_{1}-a_{2}^{\dagger})(a_{1}^{\dagger}-a_{2})=|\eta|^{2}\langle\eta|,\tag{7.75}$$

$$(a_{1}^{\dagger}+a_{2})(a_{1}+a_{2}^{\dagger})|\zeta\rangle=|\zeta|^{2}|\zeta\rangle,\tag{7.76}$$

因此，

$$\langle\eta|\exp[\mathrm{i}\theta(a_{1}^{\dagger}a_{1}+a_{2}^{\dagger}a_{2}+1)]|\zeta\rangle$$
$$=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(|\eta|^{2}+|\zeta|^{2})\tan\theta\right]\langle\eta|\exp[(a_{1}^{\dagger}a_{2}^{\dagger}-a_{1}a_{2})\ln\sec\theta]|\zeta\rangle,\tag{7.77}$$

而式中的矩阵元根据双模压缩算符正好完成对纠缠态的自然压缩，

$$\langle\eta|\exp[(a_{1}^{\dagger}a_{2}^{\dagger}-a_{1}a_{2})\ln\sec\theta]|\zeta\rangle$$
$$=\sec\theta\langle\eta|\zeta\sec\theta\rangle$$
$$=\frac{1}{2\cos\theta}\exp\left(\frac{\eta^{*}\zeta-\eta\zeta^{*}}{2\cos\theta}\right)。\tag{7.78}$$

将上式代入(7.77)式，并令 $\theta\to\frac{\pi}{2}-\theta$，得到

$$\langle\eta|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(a_{1}^{\dagger}a_{1}+a_{2}^{\dagger}a_{2}+1)\right]|\zeta\rangle$$

$$=\frac{1}{2\sin\theta}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{|\eta|^2+|\zeta|^2}{\tan\theta}+\frac{\eta^*\zeta-\eta\zeta^*}{2\sin\theta}\right), \tag{7.79}$$

这正是复的分数傅里叶变换核。

以上讨论给出了一个如何用量子光学的途径研究波动光学的例子。

习　　题

求哈密顿量 $H=(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)+\mathrm{i}C(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)$ 的能谱，试用角动量的表示式(7.70)来解。

第八章

分数汉克尔变换与纠缠态

8.1 分数汉克尔变换的本征模[74]

在二维实的分数傅氏变换式中$\left(\text{为了以下行文方便,已令 } \alpha \to -\alpha\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\mathscr{F}_\alpha[f_1(x_1,y_1)] = \frac{\exp\left[\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(x_2^2+y_2^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\pi}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(x_1^2+y_1^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{i}(x_1x_2+y_1y_2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]f_1(x_1,y_1)。\quad(8.1)$$

当被变换的函数 $f_1(x_1,y_1)$具有旋转对称性时,可写成

$$f_1(x_1 = r_1\cos\theta,\ y_1 = r_1\sin\theta) \to f(r_1,\theta) = \exp(\mathrm{i}m\theta)R(r_1),\quad(8.2)$$

且令 $x_2=r_2\cos\varphi, y_2=r\sin\varphi$,则(8.1)式在对角度积分后变为

$$\mathscr{F}_\alpha[f(r_1,\theta)] = \frac{\exp\left[\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\int_0^\infty r_1\mathrm{d}r_1R(r_1)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(r_1^2+r_2^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot \exp\left[\mathrm{i}m\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{J}_m\left[\frac{r_1r_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]。\tag{8.3}$$

根据(8.3)式,可以引入分数汉克尔变换:

$$\mathscr{H}_m^{\alpha}(R)=\int_0^{\infty}r_1\mathrm{d}r_1R(r_1)\mathscr{K}_{\alpha}^{H}(r_1,r_2,m),\tag{8.4}$$

式中 $\mathscr{K}_{\alpha}^{H}(r_1,r_2,m)$ 称为 α 阶分数汉克尔变换的积分核,

$$\mathscr{K}_{\alpha}^{H}(r_1,r_2,m)=\frac{\exp\left[\mathrm{i}\pi(1+m)\,\frac{1-\alpha}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}(r_1^2+r_2^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]\mathrm{J}_m\left[\frac{r_1r_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]。\tag{8.5}$$

在对(8.1)式积分时利用了 m 阶贝塞尔函数的积分表达式

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\exp\left[\mathrm{i}x\cos\theta+\mathrm{i}m\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]。\tag{8.6}$$

对于这个变换,其本征函数是什么呢?注意尽管两个单变量厄米特函数之积 $\mathrm{H}_n(x_1)\mathrm{H}_m(y_1)$ 是二维实的分数傅氏变换的本征函数(见(7.7)式),但它显然不是分数汉克尔变换的本征函数,因为它不具有旋转对称性。复的分数傅氏变换的定义是

$$\mathscr{F}_\alpha[f(\zeta)]=\frac{\exp\left[\mathrm{i}(1-\alpha)\,\frac{\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta|^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}+\frac{\zeta^*\eta-\zeta\eta^*}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]f(\zeta)$$

$$=G(\eta)。\tag{8.7}$$

$\left(\text{与第七章相比,已令 }\alpha\to-\frac{\pi}{2}\alpha。\right)$令 $\eta=x_2+\mathrm{i}y_2$,$\zeta=x_1+\mathrm{i}y_1$,上式即为

$$\mathscr{F}_\alpha[f(x_1,y_1)]=\frac{\exp\left[\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(x_2^2+y_2^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot\int\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\pi}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(x_1^2+y_1^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}+\frac{\mathrm{i}(x_1y_2-y_1x_2)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot f(x_1,y_1)。\tag{8.8}$$

与(8.1)式相比较,读者可以看出二者的区别。按第七章 7.3 节的讨论,可知变换式(8.7)的本征函数是双模厄米特多项式,即

$$\mathscr{F}_\alpha\left[\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(\zeta^*,\zeta)\right]=\left[-\exp\left(\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right]^{m+n}\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)$$

$$\cdot\mathrm{H}_{m,n}(-\mathrm{i}\eta^*,\mathrm{i}\eta)。\tag{8.9}$$

注意到

$$\exp\left(-\frac{|\zeta|^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(\zeta^*,\zeta)=\exp[-\mathrm{i}(m-n)\theta]\exp\left(-\frac{r_1^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r_1,r_1),$$

$$\zeta=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\tag{8.10}$$

$$\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(-\mathrm{i}\eta^*,\mathrm{i}\eta)=\exp\left[-\mathrm{i}(m-n)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right]$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{r_2^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r_2,r_2),\tag{8.11}$$

式中 $\eta=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。以下将证明 $\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r,r)$是分数汉克尔变换的本征函数。事实上,取(8.8)式中的 $f_1(x_1,y_1)=\exp\left(-\frac{r_1^2}{2}\right)\cdot\exp[-\mathrm{i}(m-n)\theta]\mathrm{H}_{m,n}(r_1,r_1)$,并令 $x_1=r_1\cos\theta,x_2=r_1\sin\theta,y_1=r_2\cos\varphi,y_2=r_2\sin\varphi$,则由(8.9)式可知,(8.8)式等价于

$$\frac{\exp\left[\mathrm{i}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\int\frac{r_1\mathrm{d}r_1\mathrm{d}\theta}{\pi}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(r_1^2+r_2^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}+\frac{\mathrm{i}r_1r_2\sin(\varphi-\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{r_1^2}{2}\right)\exp[-\mathrm{i}(m-n)\theta]\mathrm{H}_{m,n}(r_1,r_1)$$

$$=\left[-\exp\left(\mathrm{i}\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right]^{m+n}\exp\left(-\frac{r_2^2}{2}\right)\exp\left[-\mathrm{i}(m-n)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right]$$

$$\cdot \mathrm{H}_{m,n}(r_2,r_2)。\tag{8.12}$$

令 $\theta'=\varphi-\theta$，并用 m 阶贝塞尔函数的另一积分表达式：

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(\mathrm{i}x\sin\zeta-\mathrm{i}m\zeta)\mathrm{d}\zeta,\tag{8.13}$$

则(8.12)式变为

$$\frac{\exp\left[\mathrm{i}\pi(1+n-m)\frac{1-\alpha}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\int_0^{\infty}r_1\mathrm{d}r_1\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(r_1^2+r_2^2)}{2\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]\mathrm{J}_{n-m}\left[\frac{r_1r_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}\right]$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{r_1^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r_1,r_1)=(-1)^{m\alpha}\exp\left(-\frac{r_2^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r_2,r_2)。\tag{8.14}$$

把(8.14)式与分数汉克尔变换的定义式(8.4)式和(8.5)式比较，可知前者恰好表现为以贝塞尔函数 J_{n-m} 表征的分数汉克尔变换的本征函数，即

$$\mathscr{H}_{n-m}^{\alpha}\left[\exp\left(-\frac{r_1^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r_1,r_2)\right]=(-1)^{m\alpha}\exp\left(-\frac{r_2^2}{2}\right)\mathrm{H}_{m,n}(r_2,r_2)。\tag{8.15}$$

把 $\mathrm{H}_{m,n}$ 的定义式(3.127)和广义拉盖尔多项式的定义

$$\mathrm{L}_n^{\mu}(x)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n+\mu}{n-l}\frac{(-x)^l}{l!}。\tag{8.16}$$

作比较，可知二者间的关系为

$$\mathrm{H}_{m,n}(r,r)=p!(-1)^p r^l\mathrm{L}_p^l(r^2)\begin{cases}p=\min(m,n),\\ l=|m-n|。\end{cases}\tag{8.17}$$

不失一般，取 $n>m$ 时，(8.15)式可以改写为

$$\mathscr{H}_{l,p}^{\alpha}\left[\exp\left(-\frac{r_1^2}{2}\right)r_1^l\mathrm{L}_p^l(r_1^2)\right]=(-1)^{\alpha p}\exp\left(-\frac{r_2^2}{2}\right)r_2^l\mathrm{L}_p^l(r_2^2)。\tag{8.18}$$

综上所述，由纠缠态表象所诱导出来的复的分数傅里叶变换帮助我们找到了分数汉克尔变换的本征模与本征值，这进一步表明量子力学的纠缠态表象的引入是十分必要的。

8.2　分数汉克尔变换作为诱导纠缠态之间的变换

本节继续深入讨论分数汉克尔变换与诱导纠缠态表象变换之间的关系。在分数傅里叶变换核的表达式(7.27)两边乘上相因子 $\exp[\mathrm{i}(s\theta-q\varphi)]$ 后作如下积分（注意 $\eta=|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\zeta=|\zeta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$）：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}\langle\eta=|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]\mathrm{d}\theta \\
&\quad\cdot\int_0^{2\pi}|\zeta=|\zeta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{2\sin\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta|^2)}{2\tan\alpha}\right. \\
&\quad\left.+\frac{|\eta||\zeta|[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\theta)}]}{2\sin\alpha}\right\}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&\equiv\frac{1}{2\sin\alpha}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\eta|^2+|\zeta|^2)}{2\tan\alpha}\right]I,
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
I&\equiv\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}\exp\left[\mathrm{i}\,\frac{rr'\sin(\varphi-\theta)}{\sin\alpha}\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m\left(\frac{rr'}{\sin\alpha}\right)\exp[\mathrm{i}m(\varphi-\theta)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta_{m,q}\delta_{m,s}\mathrm{J}_m\left(\frac{rr'}{\sin\alpha}\right)=\delta_{s,q}\mathrm{J}_s\left(\frac{rr'}{\sin\alpha}\right)。
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

而由(6.1)式与(6.10)式可知，(8.19)式的左边实际上代表两个相互共轭的诱导纠缠态之间的变换，所以(8.19)式最终给出

$$
\langle s,r'|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]|q,r\rangle
$$

$$=\delta_{s,q}\frac{1}{2\sin\alpha}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(r^2+r'^2)}{2\tan\alpha}\right]\mathrm{J}_s\left(\frac{rr'}{\sin\alpha}\right)。\tag{8.21}$$

对照(8.21)式与(8.5)式可见，在差到一个相因子范围内，(8.21)式即是分数汉克尔变换的积分核$\left(\text{注意}-\frac{\pi}{2}\alpha\text{与}\alpha\text{之间的互换}\right)$的量子力学“版本”。这样就从纠缠态变到诱导纠缠态的过程中，把复的分数傅里叶变换过渡到分数汉克尔变换。定义

$$\begin{aligned}&\langle q,r\mid g\rangle=g(q,r),\quad\langle s,r'\mid G\rangle=G(s,r'),\\&\mid G\rangle=\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]\mid g\rangle,\end{aligned}\tag{8.22}$$

并用诱导纠缠态的完备性关系(6.8)式，得到

$$\begin{aligned}\langle s,r'\mid G\rangle&=\langle s,r'\mid\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]\mid g\rangle\\&=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\mathrm{d}r^2\langle s,r'\mid\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]\\&\quad\cdot\mid q,r\rangle\langle q,r\mid g\rangle。\end{aligned}\tag{8.23}$$

利用(8.21)式，可看出它就是从$g(q,r)$到$G(s,r')$的分数汉克尔变换：

$$\begin{aligned}G(s,r')&=\mathscr{H}_s^\alpha[g(q,r)]=\frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{s,q}\int_0^\infty\mathrm{d}r^2\\&\quad\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{i}(r^2+r'^2)}{2\tan\alpha}\right]\mathrm{J}_s\left(\frac{rr'}{\sin\alpha}\right)g(q,r)。\end{aligned}\tag{8.24}$$

而从$|s,r'\rangle$的完备性(6.16)式，又可见逆分数汉克尔变换是

$$\begin{aligned}\langle q,r\mid g\rangle&=\langle q,r\mid\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]\mid G\rangle\\&=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\mathrm{d}r'^2\langle q,r\mid\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\right]\\&\quad\cdot\mid s,r'\rangle\langle s,r'\mid G\rangle。\end{aligned}\tag{8.25}$$

从其量子力学“版本”来看，分数汉克尔变换的“可加性”，即$\mathrm{H}_\beta\mathrm{H}_\alpha=\mathrm{H}_{\alpha+\beta}$是显然的，只需用一个有关贝塞尔函数的数学公式[75]：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r^2 \exp(-\lambda r^2)\mathrm{J}_s(vr)\mathrm{J}_s(wr)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\exp\left[-\frac{1}{4\lambda}(v^2+w^2)-\mathrm{i}s\frac{\pi}{2}\right]\mathrm{J}_s\left(\frac{\mathrm{i}vw}{2\lambda}\right) \tag{8.26}$$

就可以导出之，这里不再赘述。

8.3 用角动量算符的新玻色算符实现求分数汉克尔变换

用角动量算符的新实现(7.70)式及指数算符分解式(7.72)，得其在$\langle q,r|$与$|s,r'\rangle$中的矩阵元，注意到(6.6)式和(6.14)式，得

$$\langle q,r \mid \exp[\mathrm{i}\theta(a^\dagger a+b^\dagger b+1)] \mid s,r'\rangle$$
$$=\langle q,r \mid \exp(\mathrm{i}J_+\tan\theta)\exp(J_0\ln\sec^2\theta)\exp(\mathrm{i}J_-\tan\theta) \mid s,r'\rangle$$
$$=\exp\left(\mathrm{i}\frac{r'^2+r^2}{2}\tan\theta\right)\langle q,r \mid \exp(J_0\ln\sec^2\theta) \mid s,r'\rangle, \tag{8.27}$$

式中 $\exp(J_0\ln\sec^2\theta)$是一个双模压缩算符，故有

$$\langle q,r \mid \exp[\mathrm{i}\theta(a^\dagger a+b^\dagger b+1)] \mid s,r'\rangle$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}\exp\left(\mathrm{i}\frac{r'^2+r^2}{2}\tan\theta\right)\langle q,r \mid s,\frac{r'}{\cos\theta}\rangle$$
$$=\delta_{q,s}\frac{1}{2\cos\theta}\exp\left(\mathrm{i}\frac{r'^2+r^2}{2}\tan\theta\right)\mathrm{J}_q\left(\frac{rr'}{\cos\theta}\right)。 \tag{8.28}$$

作替换 $\theta\to\frac{\pi}{2}-\theta$，就得分数汉克尔变换的核

$$\langle q,r \mid \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(a^\dagger a+b^\dagger b+1)\right] \mid s,r'\rangle$$
$$=\delta_{q,s}\frac{1}{2\sin\theta}\exp\left(\mathrm{i}\frac{r'^2+r^2}{2\tan\theta}\right)\mathrm{J}_s\left(\frac{rr'}{\sin\theta}\right), \tag{8.29}$$

利用

$$(2J_0+1)^2-(a^\dagger a-b^\dagger b)^2=-4J_-J_+, \tag{8.30}$$

可以导出

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{q^2}{r^2}\right)|q,r\rangle = 2J_-|q,r\rangle \tag{8.31}$$

$$2J_+|s,r'\rangle = -\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r'^2}+\frac{1}{r'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r'}-\frac{\mathrm{d}^2}{r'^2}\right)|s,r'\rangle。 \tag{8.32}$$

以上讨论表明了纠缠态在光学分数汉克尔变换中的用途。

第九章

热场动力学中的纠缠态表象

9.1 引言

由于自然界中绝大多数系统都不是孤立地存在的，而是“浸”在一个热库中，系统与热库之间存在着热交换，因此相应的量子理论应该能包容系统的激发与热库的能量释放两部分功能。那么系统与热库之间是否存在某种量子纠缠呢？

为了回答这个问题，先回顾一下 Umezawa 等人创建的热场动力学理论[76]。在有限温度 T 下，该理论能把一个力学量的统计平均

$$\langle A\rangle = Z^{-1}(\beta)\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta H}) \tag{9.1}$$

改写成 A 的某种纯态期望值：

$$\langle A\rangle = \langle 0(\beta)\mid A\mid 0(\beta)\rangle, \tag{9.2}$$

式中 $Z(\beta)=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}$ 是系综的配分函数，H 是哈密顿量，$\beta=\frac{1}{kT}$，k 是玻耳兹曼常数，$|0(\beta)\rangle$ 是一个与温度有关的“真空”态。

为了求 $|0(\beta)\rangle$，把它在哈密顿量 H 的本征矢空间 $|n\rangle$ 中展开

$$\mid 0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta)\mid n\rangle,\quad H\mid n\rangle = n\mid n\rangle。 \tag{9.3}$$

把(9.3)式代入(9.2)式后与(9.1)式比较可知，$f_n(\beta)$ 应满足

$$f_n^*(\beta)f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta)e^{-\beta E_n}\delta_{n,m}。 \tag{9.4}$$

为了构造出 $\delta_{n,m}$，Umezawa 等引入了一个虚构的希尔伯特空间，它的基矢 $|\tilde{n}\rangle$ 是分立正交的，即

$$\langle \tilde{n} \mid \tilde{m} \rangle = \delta_{n,m}, \tag{9.5}$$

而$|0(\beta)\rangle$就在扩展了的双模空间$|n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$中构造。令

$$f_n(\beta) = Z^{-\frac{1}{2}}(\beta) \exp\left(-\frac{\beta E_n}{2}\right) | \tilde{n} \rangle, \tag{9.6}$$

则可使(9.4)式得以满足,即

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta) \exp\left[-\frac{\beta(E_n + E_m)}{2}\right] \langle \tilde{n} \mid \tilde{m} \rangle$$
$$= Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n} \delta_{n,m}。$$

再把(9.6)式代入(9.3)式,得热真空态:

$$| 0(\beta) \rangle = Z^{-\frac{1}{2}}(\beta) \sum_n \exp\left(-\frac{\beta E_n}{2}\right) | n, \tilde{n} \rangle, \tag{9.7}$$

它确实使(9.2)式得以实现。可见,对于每一个系统的$|n\rangle$态,要伴以一个"虚态矢"$|\tilde{n}\rangle$,即要把原有的希尔伯特空间扩大为两个。例如当H代表一个自由玻色气体系统,即$H = \omega a^\dagger a$时,其本征态$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$。这里补上一个带"～"的态矢$|\tilde{n}\rangle = \frac{\tilde{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|\tilde{0}\rangle$,则热真空态是

$$| 0(\beta) \rangle = (1 - e^{-\beta\omega})^{\frac{1}{2}} \exp\left[\exp\left(-\frac{\beta\omega}{2}\right) a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] | 0, \tilde{0} \rangle, \tag{9.8}$$

式中$\tilde{a}^\dagger$是虚 Fock 空间中的产生算符,满足$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$, $\tilde{a}|\tilde{0}\rangle = 0$。

注意到从$|0,\tilde{0}\rangle$到$|0(\beta)\rangle$的变换可以用"热压缩"算符实现:

$$s(\theta) = \exp[\theta(a^\dagger \tilde{a}^\dagger - a\tilde{a})], \tag{9.9}$$

$$s(\theta) \mid 0, \tilde{0} \rangle = | 0(\beta) \rangle。 \tag{9.10}$$

不难看出

$$\begin{aligned} s(\theta) a^\dagger s^{-1}(\theta) &= a^\dagger \cosh\theta - \tilde{a} \sinh\theta, \\ s(\theta) \tilde{a}^\dagger s^{-1}(\theta) &= \tilde{a}^\dagger \cosh\theta - a \sinh\theta, \end{aligned} \tag{9.11}$$

所以θ与β的关系可以从要求哈密顿H在热真空态的期望值与玻色统计分布一致导出,即

$$\langle 0(\beta) \mid a^\dagger a \mid 0(\beta) \rangle = (e^{\beta\omega\hbar} - 1)^{-1}。 \tag{9.12}$$

上式左边应用(9.10)式和(9.11)式,得到

$$\langle 0,\tilde{0} \mid (a^\dagger \cosh\theta + \tilde{a}\sinh\theta)(\tilde{a}^\dagger \sinh\theta + a\cosh\theta) \mid 0,\tilde{0}\rangle = \sinh^2\theta。 \tag{9.13}$$

对比(9.12)式与(9.13)式,可以定出

$$\sinh^2\theta = (e^{\beta\omega\hbar} - 1)^{-1}, \quad \tanh\theta = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)。 \tag{9.14}$$

记 $a^\dagger(\beta) = a^\dagger \cosh\theta - \tilde{a}\sinh\theta$,则由

$$a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - a(\beta)\tilde{a}(\beta) = a^\dagger\tilde{a}^\dagger - a\tilde{a},$$

$$s(\theta) = \exp\{\theta[a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - a(\beta)\tilde{a}(\beta)]\} \equiv s_\beta(\theta), \tag{9.15}$$

可知(9.11)式的逆变换是

$$a^\dagger = s_\beta^{-1}(\theta)a^\dagger(\beta)s_\beta(\theta) = a^\dagger(\beta)\cosh\theta + \tilde{a}(\beta)\sinh\theta。 \tag{9.16}$$

上式的物理解释是:系统吸收能量产生量子(由 $a^\dagger$ 代表)是以两种方式进行的:① 吸收能量直接造成量子激发,以 $a^\dagger(\beta)$ 为代表;② 湮灭在热库中的粒子的空穴,以 $\tilde{a}(\beta)$ 表示。所以可引进 $a\tilde{a}$ 与 $a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}$ 的共同本征态,称为热不变相干态。当系统处于此态时,湮灭系统一个量子,而同时湮灭热库中的一个负能空穴,则总能不变,所以在热平衡时存在这样的态,用此也可研究热场动力学。

9.2 相干热态(热纠缠态)$|\tau\rangle$[77]~[82]

在极端高温下,热真空态 $|0(\beta)\rangle$ 的极限是

$$\exp(a^\dagger\tilde{a}^\dagger) \mid 0,\tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mid n,\tilde{n}\rangle \equiv \mid I\rangle。 \tag{9.17}$$

以平移算符 $D(\tau)$ 的作用之,得

$$D(\tau) \mid I\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \mid \tau \mid^2 + \tau a^\dagger - \tau^*\tilde{a}^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right) \mid 0,\tilde{0}\rangle \equiv \mid \tau\rangle, \tag{9.18}$$

可见它是一个纠缠态，也称为相干热态。热压缩算符在$|\tau\rangle$表象内有自然的表示：

$$s(\theta)=\int\frac{d^2\tau}{\pi\mu}\left|\frac{\tau}{\mu}\right\rangle\langle\tau|,\quad \mu^2=\frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta}。\tag{9.19}$$

$|\tau\rangle$的正交完备性是

$$\int\frac{d^2\tau}{\pi}|\tau\rangle\langle\tau|=1,\quad \langle\tau'|\tau\rangle=\pi\delta(\tau-\tau')\delta(\tau^*-\tau'^*)。\tag{9.20}$$

定义 $\widetilde{D}(\tau)=\exp(\tau\tilde{a}^\dagger-\tau^*\tilde{a})$，则$|\tau\rangle$也可写成

$$|\tau\rangle=\widetilde{D}^\dagger(\tau^*)|I\rangle。\tag{9.21}$$

9.3 密度矩阵 ρ 在相干热态表象中的表示

本节讨论$|\tau\rangle$的若干应用。在扩大的希尔伯特空间中，研究密度矩阵ρ在$\langle\tau|$表象中的表示。易见$|\tau\rangle$是$a-\tilde{a}^\dagger$，$\tilde{a}-a^\dagger$的共同本征态：

$$(a-\tilde{a}^\dagger)|\tau\rangle=\tau|\tau\rangle,\tag{9.22}$$

$$(\tilde{a}-a^\dagger)|\tau\rangle=-\tau^*|\tau\rangle。\tag{9.23}$$

当$\tau=0$时，有$|\tau=0\rangle=|I\rangle$，

$$a|I\rangle=\tilde{a}^\dagger|I\rangle,\quad a^\dagger|I\rangle=\tilde{a}|I\rangle。\tag{9.24}$$

因此，对在原 Fock 空间中任意的算符

$$\rho=\sum_{n,m=0}\rho_{n,m}a^{\dagger m}a^n,\tag{9.25}$$

定义

$$|\rho\rangle=\rho|I\rangle,\tag{9.26}$$

则有

$$\begin{aligned}|\rho\rangle&=\sum_{n,m=0}\rho_{n,m}a^{\dagger m}\tilde{a}^{\dagger n}|I\rangle=\sum_{n,m}\rho_{n,m}\tilde{a}^{\dagger n}\tilde{a}^m|I\rangle\\&=\sum_{n,m=0}(\rho^*_{n,m}\tilde{a}^{\dagger m}\tilde{a}^n)^\dagger|I\rangle。\end{aligned}\tag{9.27}$$

对系统的密度算符定义一种“～”运算（或操作），它把$a\to\tilde{a}$，$a^\dagger\to$

$\tilde{a}^\dagger$，并且把 c 数变成其复共轭，那么对照(9.25)式，(9.27)式可以写为

$$|\rho\rangle=\tilde{\rho}^\dagger|I\rangle。\tag{9.28}$$

现在可把系统的任一算符 A 的系综热平均写成 A 在扩大的希尔伯特空间中的两个纯态之间的矩阵元

$$\langle A\rangle=\mathrm{Tr}(A\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|A\rho|n\rangle=\sum_{n,m=0}^{\infty}\langle n|A\rho|m\rangle\delta_{n,m}$$

$$=\sum_{n,m=0}^{\infty}\langle n,\tilde{n}|A\rho|m,\tilde{m}\rangle=\langle I|A|\rho\rangle,\tag{9.29}$$

式中 $|\rho\rangle$ 也是一个双模纯态了（其中一模是在虚的空间中）。例如，对于纯真空态密度矩阵 $\rho=|0\rangle\langle 0|$，有

$$|\rho\rangle=|0\rangle\langle 0|\sum_{n=0}^{\infty}|n,\tilde{n}\rangle=|0\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{n,0}|\tilde{n}\rangle=|0,\tilde{0}\rangle。\tag{9.30}$$

以下将计算各种 $\langle\tau|\rho\rangle$，它将有利于解密度矩阵方程等问题。例如当 $\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 是一个纯相干态密度矩阵时，

$$\begin{aligned}\langle\tau|\rho\rangle&=\langle\tau|\alpha\rangle\langle\alpha|I\rangle=\langle\tau|D(\alpha)|0\rangle\langle 0|D^\dagger(\alpha)|I\rangle\\&=\langle\tau|D(\alpha)|0\rangle\langle 0|\tilde{D}(\alpha^*)|I\rangle\\&=\langle\tau|D(\alpha)\tilde{D}(\alpha^*)|0\rangle\langle 0|I\rangle\\&=\langle\tau|D(\alpha)\tilde{D}(\alpha^*)|0,\tilde{0}\rangle\\&=\langle\tau|\alpha,\tilde{a}^*\rangle,\end{aligned}\tag{9.31}$$

所以 $|\rho\rangle=|\alpha,\tilde{a}^*\rangle$，式中 $|\tilde{a}^*\rangle\equiv\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}+\alpha^*\tilde{a}^\dagger\right)|\tilde{0}\rangle$，而且由本征方程(9.23)得

$$\begin{aligned}D(\alpha)\tilde{D}(\alpha^*)|\tau\rangle&=\exp[\alpha(a^\dagger-\tilde{a})-\alpha^*(a-\tilde{a}^\dagger)]|\tau\rangle\\&=\exp(\alpha\tau^*-\alpha^*\tau)|\tau\rangle。\end{aligned}\tag{9.32}$$

由(9.32)式及(9.31)式，得

$$\langle\tau|\rho\rangle=\langle\tau|D(\alpha)\tilde{D}(\alpha^*)|0,\tilde{0}\rangle$$

$$= \langle \tau | D^{\dagger}(-\alpha)\widetilde{D}^{\dagger}(-\alpha^*) | 0,\tilde{0}\rangle$$

$$= \exp(-\alpha^*\tau + \alpha\tau^*)\langle \tau | 0,\tilde{0}\rangle$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}|\tau|^2 - \alpha^*\tau + \alpha\tau^*\right), \tag{9.33}$$

这是一个高斯函数。显然，当 $\rho_1 = |\alpha\rangle\langle\alpha'|$ 时，相应的扩展空间中态矢 $|\rho_1\rangle = |\alpha,\tilde{\alpha}'^*\rangle$，它在 $\langle\tau|$ 表象中的表示为

$$\langle \tau | \rho_1 \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\tau|^2 + |\alpha|^2 + |\alpha'|^2) - \tau\alpha'^* + \tau^*\alpha + \alpha\alpha'^*\right]。 \tag{9.34}$$

特别当 $\alpha = \alpha'$ 时，上式回到(9.33)式。对于热相干态的密度矩阵

$$\rho_{热} = (1 - e^{-\beta\omega'})D(\alpha)e^{-\beta\omega' a^{\dagger}a}D^{\dagger}(\alpha),$$
$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad \hbar = 1, \tag{9.35}$$

其迹为

$$\mathrm{Tr}\rho_{热} = (1 - e^{-\beta\omega'})\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\omega' a^{\dagger}a} = 1, \tag{9.36}$$

且有

$$\langle \tau | \rho\rangle_{热} = \langle \tau | (1 - e^{\beta\omega'})D(\alpha)e^{-\beta\omega' a^{\dagger}a}D^{\dagger}(\alpha) | I\rangle$$

$$= \langle \tau | (1 - e^{-\beta\omega'})D(\alpha)\widetilde{D}(\alpha^*)e^{-\omega'\beta a^{\dagger}a} | I\rangle$$

$$= (1 - e^{-\beta\omega'})e^{\alpha\tau^* - \alpha^*\tau}\langle \tau | e^{-\beta\omega' a^{\dagger}a} | I\rangle。 \tag{9.37}$$

为了计算上式右边的矩阵元，注意到应用(9.19)式，有

$$s(\theta) | 0,\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\cosh\theta}\exp(\tanh\theta a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}) | 0,\tilde{0}\rangle$$

$$= \int \frac{d^2\tau}{\mu\pi}\left|\frac{\tau}{\mu}\right\rangle\langle \tau | 0,\tilde{0}\rangle, \tag{9.38}$$

故而

$$e^{-\beta\omega' a^{\dagger}a} | I\rangle = \exp(e^{-\beta\omega'}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}) | 0,\tilde{0}\rangle$$

$$= \cosh\theta \int \frac{d^2\tau}{\mu\pi}\left|\frac{\tau}{\mu}\right\rangle\langle \tau | 0,\tilde{0}\rangle, \tag{9.39}$$

$$e^{-\beta\omega'} \equiv \tanh\theta < 1, \quad \mu^2 = \frac{1 + \tanh\theta}{1 - \tanh\theta}。$$

于是

$$\begin{aligned}\langle\tau\mid \mathrm{e}^{-\omega'\beta a^{\dagger}a}\mid I\rangle &= \cosh\theta\int\frac{\mathrm{d}^2\tau'}{\mu\pi}\langle\tau|\frac{\tau'}{\mu}\rangle\langle\tau'\mid 0,\tilde{0}\rangle\\ &= \cosh\theta\int\frac{\mathrm{d}^2\tau'}{\mu\pi}\pi\delta^{(2)}\left(\tau-\frac{\tau'}{\mu}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\mid\tau'\mid^2\right)\\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega'}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega'}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega'}}\right)\mid\tau\mid^2\right]。\end{aligned}\tag{9.40}$$

将(9.40)式代入(9.37)式，得

$$\langle\tau\mid\rho\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\coth\frac{\omega'\beta}{2}\mid\tau\mid^2+\alpha\tau^*-\alpha^*\tau\right)。\tag{9.41}$$

可见在$\langle\tau|$表象中，$|\rho\rangle_{热}$呈现出高斯型。注意$\frac{1}{2}\coth\frac{\beta\omega'}{2}=\bar{n}+\frac{1}{2}$，这里$\bar{n}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega'}-1}$是在热真空态中的光子平均数。当$T\to 0,\bar{n}\to 0$。从(9.41)式可见$\langle\tau|\rho\rangle\to\exp(\alpha\tau^*-\alpha^*\tau)$代表一个相干态，而无热噪声。

另一个较复杂的例子是压缩热相干态的密度矩阵

$$\rho_2 = (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})D(\alpha)s(z)\mathrm{e}^{-\beta\omega a^{\dagger}a}s^{+}(z)D^{+}(\alpha),\tag{9.42}$$

式中$s(z)=\exp\left(\frac{z^*}{2}a^2-\frac{z}{2}a^{\dagger 2}\right)$是单模压缩算符，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。由(9.20)式与(9.24)式可知，$|\rho_2\rangle$在$\langle\tau|$表象中的表示为

$$\begin{aligned}\langle\tau\mid\rho_2\rangle &= (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\langle\tau\mid D(\alpha)\tilde{D}(\alpha^*)s(z)\tilde{s}(z^*)\mathrm{e}^{-\beta\omega a^{\dagger}a}\mid I\rangle\\ &= (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\exp(\alpha\tau^*-\alpha^*\tau)\langle\tau\mid s(z)\tilde{s}(z^*)\int\frac{\mathrm{d}^2\tau'}{\pi}\mid\tau'\rangle\\ &\quad\cdot\langle\tau'\mid\mathrm{e}^{-\beta\omega a^{\dagger}a}\mid I\rangle,\end{aligned}\tag{9.43}$$

式中

$$\begin{aligned}\langle\tau\mid s(z)\tilde{s}(z^*)\mid\tau'\rangle &= \langle\tau\mid s(z)\tilde{s}(z^*)D(\tau')\mid I\rangle\\ &= \langle\tau\mid s(z)D(\tau')s(-z)\mid I\rangle\\ &= \langle\tau\mid D(\tau'\cosh r-\tau'^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sinh r)\mid I\rangle\\ &= \pi\delta^{(2)}(\tau'-\tau\cosh r-\tau^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sinh r)。\end{aligned}\tag{9.44}$$

代回(9.43)式,并由(9.40)式得

$$\langle\tau\mid\rho_2\rangle=e^{\alpha\tau^*-\alpha^*\tau}\int d^2\tau'\delta^{(2)}(\tau'-\tau\cosh r-\tau^*e^{i\varphi}\sinh r)$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1+e^{-\beta\omega}}{1-e^{-\beta\omega}}\mid\tau'\mid^2\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\coth\frac{\beta\omega}{2}\mid\tau\cosh r+\tau^*e^{i\varphi}\sinh r\mid^2+\alpha\tau^*-\alpha^*\tau\right),\tag{9.45}$$

它也是高斯函数。

9.4 $\langle\tau|\rho\rangle$的各种应用:计算系综平均

以上计算了几种密度矩阵的$\langle\tau|\rho\rangle$,它有什么用处呢?首先,它提供了计算算符的系综平均的新途径。不失一般,取

$$A=\sum_{n,m}g_{m,n}a^m a^{\dagger n}。\tag{9.46}$$

根据A的系综平均,可以写成形为

$$\langle A\rangle=\langle I\mid A\mid\rho\rangle\tag{9.47}$$

的陈述,并引入相干态完备性及$|\alpha\rangle\langle\alpha|I\rangle=|\alpha,\tilde{\alpha}^*\rangle$,得

$$\langle A\rangle=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\langle I\mid\sum_{m,n}g_{m,n}a^m\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid a^{\dagger n}\mid\rho\rangle$$

$$=\sum_{m,n}g_{m,n}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\alpha^m\alpha^{*n}\langle I\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid\rho\rangle$$

$$=\sum_{n,m}g_{m,n}\int\frac{d^2\tau}{\pi}\int d^2\alpha\alpha^m\alpha^{*n}\langle\alpha,\tilde{\alpha}^*\mid\tau\rangle\langle\tau\mid\rho\rangle$$

$$=\sum_{m,n}g_{m,n}\int\frac{d^2\tau}{\pi}\int d^2\alpha\alpha^m\alpha^{*n}\exp\left(-\frac{\mid\tau\mid^2}{2}+\alpha^*\tau-\alpha\tau^*\right)\langle\tau\mid\rho\rangle$$

$$=A\left(\frac{\partial}{\partial\tau^*},-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\exp\left(-\frac{\mid\tau\mid^2}{2}\right)\langle\tau\mid\rho\rangle\mid_{\tau=0},\tag{9.48}$$

所以算符A的系综平均换成了上式的微商运算。例如当ρ取压缩热相干态的密度矩阵(9.42)式时,粒子数的起伏为

$$(\Delta N)^2 = \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = (2\bar{n}+1)(\Delta N)^2\mid_{T=0} + 4\bar{n}^2\cosh^2 r\sinh^2 r + \bar{n}(\bar{n}+1)(\cosh^2 r + \sinh^2 r)^2, \tag{9.49}$$

式中 $\bar{n}=\dfrac{1}{e^{\beta\omega}-1}$，而$(\Delta N)^2\mid_{T=0}$是当 $T=0$ 时的均方差，即粒子数处在零温下压缩态时的起伏

$$(\Delta N)^2\mid_{T=0} = \mid \alpha\cosh r - \alpha^* e^{i\varphi}\sinh r\mid^2 + 2\cosh^2 r\sinh^2 r。 \tag{9.50}$$

9.5　用$\langle\tau|\rho\rangle$研究量子光学的相空间分布理论

在热场理论中，曾引入了一个广义的 Q 表示：

$$Q(\rho,\alpha,\beta) = (1-e^{-\beta\omega})\frac{1}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho D(\alpha)e^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha)]。$$

利用(9.47)式及(9.33)式，可知它可以被写为

$$\begin{aligned}Q(\rho,\alpha) &= \langle I\mid D(\alpha)e^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha)\mid\rho\rangle(1-e^{-\beta\omega}) \\ &= (1-e^{-\beta\omega})\langle I\mid D(\alpha)e^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha)\int\frac{d^2\tau}{\pi}\mid\tau\rangle\langle\tau\mid\rho\rangle \\ &= \int\frac{d^2\eta}{\pi}\langle\tau\mid\rho\rangle\exp\left[-\left(\bar{n}+\frac{1}{2}\right)\mid\tau\mid^2-(\tau\alpha^*-\tau^*\alpha)\right],\end{aligned} \tag{9.51}$$

式中 $\bar{n}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\coth\dfrac{\beta\omega}{2}$。另一方面。定义广义的 P 表示为

$$\rho = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}P(\rho,\alpha,\beta)D(\alpha)e^{-\beta\omega a^\dagger a}D^\dagger(\alpha)(1-e^{-\beta\omega})。 \tag{9.52}$$

在$\langle\tau|$表象中，

$$\langle\tau\mid\rho\mid I\rangle = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}P(\rho,\alpha,\beta)\exp\left(-\frac{\mid\tau\mid^2}{2}\coth\frac{\beta\omega}{2}+\alpha\tau^*-\alpha^*\tau\right), \tag{9.53}$$

由此导出

·

$$\langle\tau\mid\rho\mid I\rangle\exp\left(\frac{|\tau|^2}{2}\coth\frac{\beta\omega}{2}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}P(\rho,\alpha,\beta)\mathrm{e}^{\alpha\tau^*-\alpha^*\tau}。\tag{9.54}$$

把它看作傅氏变换，则其反傅氏变换是

$$P(\rho,\alpha,\beta)=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\langle\rho\mid\tau\rangle\exp\left[\left(\bar{n}+\frac{1}{2}\right)|\tau|^2-(\tau\alpha^*-\tau^*\alpha)\right]。\tag{9.55}$$

(9.51)式与(9.55)式是用$\langle\tau|\rho\rangle$分别求出广义 Q 表示与广义 P 表示的表达式。以下研究 Wigner 函数 $W(\alpha)$的计算：

$$W(\alpha)=\mathrm{Tr}[\Delta(\alpha)\rho],\tag{9.56}$$

式中 Wigner 算符的显式是

$$\Delta(\alpha)=\pi^{-1}D(2\alpha)(-1)^{a^\dagger a}。\tag{9.57}$$

用热场动力学的方法，(9.56)式可改写为

$$\begin{aligned}W(\alpha)&=\sum_{n,m}^{\infty}\langle n,\tilde{n}\mid\Delta(\alpha)\rho\mid m,\tilde{m}\rangle\\&=\pi^{-1}\langle\tau=0\mid D^\dagger(-2\alpha)(-1)^{a^\dagger a}\mid\rho\rangle\\&=\pi^{-1}\langle\tau=-2\alpha\mid(-1)^{a^\dagger a}\mid\rho\rangle\\&=\pi^{-1}\langle\nu=2\alpha\mid\rho\rangle,\end{aligned}\tag{9.58}$$

式中

$$\begin{aligned}|\nu\rangle&=D(\nu)\mathrm{e}^{-a^\dagger\tilde{a}^\dagger}\mid0,\tilde{0}\rangle\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}|\nu|^2+\nu a^\dagger+\nu^*\tilde{a}^\dagger-a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right)|0,\tilde{0}\rangle,\end{aligned}\tag{9.59}$$

它是$|\tau\rangle$的共轭态：

$$\begin{aligned}|\tau\rangle&=(-1)^{\tilde{a}^\dagger\tilde{a}}\mid\nu\rangle|_{\nu=\tau},\\(-1)^{a^\dagger a}\mid\tau\rangle&=|\nu\rangle|_{\nu=-\tau}。\end{aligned}\tag{9.60}$$

(9.58)式是求 Wigner 函数的新方法，它无需用系统平均，而代之以求两个纯态之间的内积，这是引入热纠缠态的另一优点。

例如求 $\rho=|n\rangle\langle n|$的 Wigner 函数，则用(9.58)式及$|\nu\rangle$的双

模厄米特多项式展开：

$$|\nu\rangle=\exp\left(-\frac{|\nu|^2}{2}\right)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m!n!}}\mathrm{H}_{m,n}(\nu,\nu^*)\,|m,\tilde{n}\rangle,\tag{9.61}$$

得

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\langle\nu=2\alpha\,|\,n\rangle\langle n\,|\,I\rangle&=\pi^{-1}\exp(-2\,|\,\alpha\,|^2)\sum_{m',n'=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m'!n'!}}\\&\quad\cdot\mathrm{H}^*_{m',n'}(2\alpha,2\alpha^*)\langle\tilde{n}'\,|\,\tilde{n}\rangle\delta_{m',n'}\\&=\pi^{-1}\exp(-2\,|\,\alpha\,|^2)\frac{1}{n!}\mathrm{H}^*_{n,n}(2\alpha,2\alpha^*),\end{aligned}\tag{9.62}$$

即$|n\rangle\langle n|$的 Wigner 函数正比于 n 阶双模厄米特多项式，这是一个易记忆的公式，它也可以转化为拉盖尔多项式。因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\mathrm{H}^*_{n,n}(2\alpha,2\alpha^*)&=\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!(n-l)!}(-1)^l(4\,|\,\alpha\,|^2)^{n-l}\\&=(-1)^n\mathrm{L}_n^0(4\,|\,\alpha\,|^2)。\end{aligned}\tag{9.63}$$

又如求纯相干态的 Wigner 函数，$\rho=|z\rangle\langle z|$。由于

$$|\,z\rangle\langle z\,|\,I\rangle=D(z)\tilde{D}(z^*)\,|\,I\rangle=|\,z,\tilde{z}^*\rangle,\tag{9.64}$$

所以

$$\pi^{-1}\langle\nu=2\alpha\,|\,z,\tilde{z}^*\rangle=\pi^{-1}\exp[-2(|\,\alpha\,|^2+|\,z\,|^2-\alpha^*z-\alpha z^*)]。\tag{9.65}$$

在量子光学中，人们还曾引入相空间分布函数

$$\Phi(\alpha,s)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho\Delta^{(s)}(\alpha,\alpha^*)]\tag{9.66}$$

来描述量子算符期望值的演化，其中 $\Delta^{(s)}$ 是广义 Wigner 算符：

$$\Delta^{(s)}(\alpha,\alpha^*)=\int\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\pi}D(\tau)\exp\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)|\,\tau\,|^2+\tau^*\alpha-\alpha^*\tau\right]。\tag{9.67}$$

特别当 $s=\frac{1}{2}$ 时，它就是 Wigner 算符。在扩大的希尔伯特空间

中，

$$\Phi(\alpha,s)=\frac{1}{\pi}\langle I\mid\Delta^{(s)}(\alpha,\alpha^*)\mid\rho\rangle。\tag{9.68}$$

把(9.67)式代入(9.68)式，得(注意$\langle I|D(\tau)=\langle-\tau|$)

$$\Phi(\alpha,s)=\frac{1}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\pi}\langle-\tau\mid\rho\rangle\exp\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)\mid\tau\mid^2+\tau^*\alpha-\alpha^*\tau\right]。\tag{9.69}$$

9.6 密度算符在$\langle\tau|$表象中的时间演化

用$\langle\tau|$表象可以从另一途径研究量子主方程，例如，描写某一光场的密度矩阵的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho=k\left[a\rho a^{\dagger}+a^{\dagger}\rho a-\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)\rho-\rho\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)\right]。\tag{9.70}$$

将其转化到热场动力学去研究，在方程两边作用$|I\rangle$，用(9.24)式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mid\rho\rangle&=k[a\tilde{a}+a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}-(a^{\dagger}a+\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}+1)]\mid\rho\rangle\\&=-k[(a-\tilde{a}^{\dagger})(a^{\dagger}-\tilde{a})]\mid\rho\rangle。\end{aligned}\tag{9.71}$$

在$\langle\tau|$表象中，

$$\begin{aligned}&\langle\tau\mid(a-\tilde{a}^{\dagger})(a^{\dagger}-\tilde{a})=\mid\tau\mid^2\langle\tau\mid,\\&\frac{\partial}{\partial t}\langle\tau\mid\rho\rangle=-k\mid\tau\mid^2\langle\tau\mid\rho\rangle,\end{aligned}\tag{9.72}$$

故有

$$\langle\tau\mid\rho(\tau)\rangle=\exp(-kt\mid\tau\mid^2)\langle\tau\mid\rho(0)\rangle。\tag{9.73}$$

这是一个很简洁的时间演化表达式，表明了用热场动力学及在$\langle\tau|$表象中研究密度矩阵的演化会带来很大方便。用(9.69)式又可知相应的相空间分布函数将演化为

$$\Phi[\alpha,s,\rho(t)]=\frac{1}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\pi}\langle\tau\mid\rho(t)\rangle\exp\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)\mid\tau\mid^2-\tau^*\alpha+\tau\alpha^*\right]$$

$$= \Phi[\alpha, s - kt, \rho(0)]。 \tag{9.74}$$

这是一个很有趣的结果,它把密度算符的演化用相空间函数的演化表达出来。

再考虑一个有关线性振子 $H = \omega a^{\dagger} a$ 的更加复杂的主方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\mathrm{i}[H, \rho] + \frac{1}{2}\gamma(\bar{n}+1)(2a\rho a^{\dagger} - a^{\dagger} a\rho - \rho a^{\dagger} a) + \frac{1}{2}\gamma\bar{n}(2a^{\dagger}\rho a - aa^{\dagger}\rho - \rho aa^{\dagger})。 \tag{9.75}$$

上式两边作用于$|I\rangle$上,得到

$$\frac{\partial}{\partial t}|\rho\rangle = -\mathrm{i}\hat{H}|\rho\rangle, \tag{9.76}$$

式中

$$-\mathrm{i}\hat{H} = -\mathrm{i}\omega(a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) + \frac{1}{2}\gamma(\bar{n}+1)(2a\tilde{a} - a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) + \frac{1}{2}\gamma\bar{n}(2a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger} - aa^{\dagger} - \tilde{a}\tilde{a}^{\dagger})。 \tag{9.77}$$

注意到式中的算符是以下四类:

$$\begin{aligned} K_+ &= a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}, \\ K_- &= a\tilde{a}, \\ K_3 &= \frac{a^{\dagger}a + \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + 1}{2}, \\ K_0 &= (a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})。 \end{aligned} \tag{9.78}$$

$K_{\pm}$,K_3 满足 $SU(1,1)$李代数:

$$[K_-, K_+] = 2K_3, \quad [K_3, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \tag{9.79}$$

而 K_0 是 $SU(1,1)$的 Casimir 算符。根据李代数的封闭性,可以推断(9.75)式的解的形式是

$$|\rho(t)\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\omega t K_0 + \frac{1}{2}\gamma t\right)\exp(\gamma_+ K_+ + \gamma_3 K_3 + \gamma_- K_-)|\rho(0)\rangle, \tag{9.80}$$

式中,

$$\gamma_+ = \gamma\bar{n}t, \quad \gamma_3 = -\gamma(2\bar{n}+1)t, \quad \gamma_- = \gamma(\bar{n}+1)t。 \tag{9.81}$$

根据 $SU(1,1)$李代数的指数分解恒等式:[81]

$$\exp(\gamma_+ K_+ + \gamma_3 K_3 + \gamma_- K_-) = \exp(\Gamma_+ K_+)\exp[(2\ln\sqrt{\Gamma_3})K_3] \cdot \exp(\Gamma_- K_-), \tag{9.82}$$

式中

$$\Gamma_\pm = \frac{2\gamma_\pm \sinh\varphi}{2\varphi\cosh\varphi - \gamma_3\sinh\varphi},$$
$$\sqrt{\Gamma_3} = \frac{2\varphi}{2\varphi\cosh\varphi - \gamma_3\sinh\varphi}, \tag{9.83}$$
$$\varphi^2 = \left(\frac{\gamma_3}{2}\right)^2 - \gamma_+\gamma_-。$$

所以,在热纠缠态表象中

$$\langle\tau \mid \rho(t)\rangle = \langle\tau \mid \exp\left(-\mathrm{i}\omega t K_0 + \frac{1}{2}\gamma t\right)\exp(\Gamma_+ K_+) \cdot \exp[(2\ln\sqrt{\Gamma_3})K_3]\exp(\Gamma_- K_-) \mid \rho(0)\rangle。 \tag{9.84}$$

由(9.81)式,可将(9.83)式改写为

$$\varphi = \frac{\gamma t}{2},$$
$$\Gamma_+ = \frac{2\bar{n}\sinh\frac{\gamma t}{2}}{2\bar{n}\sinh\frac{\gamma t}{2} + \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right)},$$
$$\Gamma_- = \frac{2(\bar{n}+1)\sinh\frac{\gamma t}{2}}{2\bar{n}\sinh\frac{\gamma t}{2} + \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right)}, \tag{9.85}$$
$$\sqrt{\Gamma_3} = \frac{1}{2\bar{n}\sinh\frac{\gamma t}{2} + \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right)}。$$

再用正规乘积展开式:

$$\exp[(2\ln\sqrt{\Gamma_3})K_3]=\sqrt{\Gamma_3}:\exp[(\sqrt{\Gamma_3}-1)(a^{\dagger}a+\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})]:,\tag{9.86}$$

以及在(9.84)式中插入相干态的完备性和热纠缠态的完备性(9.20)式，并用(9.34)式，可导出

$$\langle\tau\mid\rho(t)\rangle=\exp\left[-(2\bar{n}+1)\mid\tau\mid^{2}\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sinh\frac{\gamma t}{2}\right]\cdot\left\langle\tau\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mid\rho(0)\right\rangle。\tag{9.87}$$

特别当 $\gamma=0$ 时，无阻尼，上式右边矩阵元变为$\langle\tau\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}|\rho(0)\rangle$，这与相干态$|\alpha\rangle$在谐振子位势下演化为$|\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\rangle$相似。以上计算表明热纠缠态表象是有用的，它不但大大简化了运算，而且物理上直观，能更进一步反映热场动力学的优点。

9.7　化解密度矩阵主方程为 c 数方程的纠缠态表象方法

量子光学中的主方程转变为经典 c 数方程有几种办法，可以用 Q 表示、P 表示或用 Wigner 函数表示来实现。本节着重介绍用纠缠态表象可以方便快捷地实现此目的。例如当主方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega[a^{\dagger}a,\rho]\tag{9.88}$$

时，由热纠缠态及(9.17)式和(9.27)式，得

$$a^{\dagger}a\mid I\rangle=\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}\mid I\rangle。\tag{9.89}$$

把(9.88)式两边作用于$|I\rangle$，得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mid I\rangle=-\mathrm{i}\omega(a^{\dagger}a-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})\mid\rho\rangle。\tag{9.90}$$

由于

$$(a^{\dagger}a-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})\mid\tau\rangle=(a^{\dagger}\tau+\tilde{a}^{\dagger}\tau^{*})\exp\left(-\frac{1}{2}\mid\tau\mid^{2}+\tau a^{\dagger}-\tau^{*}\tilde{a}^{\dagger}+a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\right)\mid 0,0\rangle$$

$$= -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \mid \tau\rangle, \tag{9.91}$$

式中 $\tau = |\tau| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。所以,(9.90)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau \mid \rho\rangle = \omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle\tau \mid \rho\rangle,$$

其解的形式为

$$\langle\tau \mid \rho\rangle = f\left(\frac{\varphi}{\omega} + t\right) g(\mid \tau \mid^2)。 \tag{9.92}$$

这表明 ρ 的演化中有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 这样的位相因子。第二个例子是在阈值下的激光主方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = K(2a\rho a^{\dagger} - a^{\dagger}a\rho - \rho a^{\dagger}a) + G(2a^{\dagger}\rho a - aa^{\dagger}\rho - \rho aa^{\dagger}), \tag{9.93}$$

式中 K 代表阈值,$G<K$。两边作用于 $|I\rangle$,给出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \mid I\rangle &= [K(2a\tilde{a} - a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) + G(2a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger} - aa^{\dagger} - \tilde{a}\tilde{a}^{\dagger})] \mid \rho\rangle \\ &= \{K[(a - \tilde{a}^{\dagger})\tilde{a} + (\tilde{a} - a^{\dagger})a] + G[(a^{\dagger} - \tilde{a})\tilde{a}^{\dagger} \\ &\quad + (\tilde{a}^{\dagger} - a)a^{\dagger}]\} \mid \rho\rangle,\end{aligned} \tag{9.94}$$

投影到 $\langle\tau|$ 表象并由(9.22)式和(9.23)式得

$$\langle\tau \mid \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \mid I\rangle = K\langle\tau \mid (\eta\tilde{a} - \eta^{*}a) \mid \rho\rangle + G\langle\tau \mid (\eta^{*}\tilde{a}^{\dagger} - \eta a^{\dagger}) \mid \rho\rangle。 \tag{9.95}$$

由于

$$(\tau\tilde{a} - \tau^{*}a)\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}} \mid 0,\tilde{0}\rangle = \lambda(\tau a^{\dagger} - \tau^{*}\tilde{a}^{\dagger})\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}} \mid 0,\tilde{0}\rangle, \tag{9.96}$$

所以如设 $|\rho\rangle = \mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}} |0,\tilde{0}\rangle$,则(9.95)式变为

$$\langle\tau \mid \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \mid \tau = 0\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau \mid \rho\rangle = (G - \lambda K)\langle\tau \mid (\eta a^{\dagger} - \eta^{*}\tilde{a}^{\dagger}) \mid \rho\rangle。 \tag{9.97}$$

当 $G-\lambda K=0$ 时,有稳定解

$$|\rho\rangle = \exp\left(\frac{a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}G}{K}\right)|0,\tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{G}{K}\right)^{n}|n,\tilde{n}\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{G}{K}\right)^{n}|n\rangle\langle n|\eta=0\rangle。\tag{9.98}$$

它说明ρ代表一种混沌态(在激光器的阈值之下的状态)

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{G}{K}\right)^{n}|n\rangle\langle n|。\tag{9.99}$$

而当在(9.94)式中取$K=\frac{1}{2}\gamma(\bar{n}+1)$，$G=\frac{1}{2}\gamma\bar{n}$，有

$$\begin{aligned}\langle\tau|\frac{\mathrm{d}|\rho\rangle}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}\gamma\langle\tau|\Big\{(\bar{n}+1)[(a-\tilde{a}^{\dagger})\tilde{a}+(\tilde{a}-a^{\dagger})a] \\ &\quad +\bar{n}[(a^{\dagger}-\tilde{a})\tilde{a}^{\dagger}+(\tilde{a}^{\dagger}-a)a^{\dagger}]\Big\}|\rho\rangle \\ &= \frac{1}{2}\gamma\bar{n}\langle\tau|\Big\{[\tau(\tilde{a}-a^{\dagger})+\tau^{*}(\tilde{a}^{\dagger}-a)]|\rho\rangle \\ &\quad +\frac{1}{2}\gamma\langle\tau|(\eta\tilde{a}-\eta^{*}a)\Big\}|\rho\rangle。\end{aligned}\tag{9.100}$$

由

$$\begin{aligned}\langle\tau|\tilde{a}^{\dagger}|\rho\rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial\tau^{*}}-\frac{\eta}{2}\right)f, \\ \langle\tau|a^{\dagger}|\rho\rangle &= -\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\tau^{*}}{2}\right)f, \\ f &\equiv \langle\tau|\rho\rangle, \\ \langle\tau|\tilde{a} &= -\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\tau^{*}}{2}\right)\langle\eta|, \\ \langle\tau|a &= \left(\frac{\partial}{\partial\tau^{*}}+\frac{\tau}{2}\right)\langle\eta|,\end{aligned}\tag{9.101}$$

(9.100)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau|\rho\rangle = \frac{1}{2}\gamma\left[-(2\bar{n}+1)|\tau|^{2}-\tau\frac{\partial}{\partial\tau}-\tau^{*}\frac{\partial}{\partial\tau^{*}}\right]\langle\tau|\rho\rangle。\tag{9.102}$$

由

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau^*}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\tag{9.103}$$

式中 $r\equiv|\tau|$。得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle=\frac{1}{2}\gamma\left[-(2\bar{n}+1)r^2-r\frac{\partial}{\partial r}\right]\langle\tau\mid\rho\rangle,$$

这正是福克-普朗克方程。若把(9.93)式的右边改为

$$\mathscr{L}'\equiv M(2a^\dagger\rho a^\dagger-a^\dagger a^\dagger\rho-\rho a^\dagger a^\dagger)+M^*(2a\rho a-aa\rho-\rho aa),\tag{9.104}$$

则由规则

$$\begin{aligned}&\langle\tau\mid(a-\tilde{a}^\dagger)\mid\rho\rangle=\tau f,\\&\langle\tau\mid(\tilde{a}-a^\dagger)\mid\rho\rangle=-\tau^*f,\\&g(\tilde{a}^\dagger,\tilde{a})\rho=\rho g(\tilde{a}^\dagger,\tilde{a})\end{aligned}\tag{9.105}$$

可知,

$$\begin{aligned}\langle\tau\mid\mathscr{L}'\mid\rho\rangle&=\langle\tau\mid[M(2a^\dagger\tilde{a}-a^\dagger a^\dagger-\tilde{a}^2)\\&\quad+M^*(2a\tilde{a}^\dagger-aa-\tilde{a}^{\dagger 2})]\mid\rho\rangle\\&=\langle\tau\mid[M(a^\dagger-\tilde{a})^2+M^*(\tilde{a}^\dagger-a)^2]\mid\rho\rangle\\&=-(M\tau^{*2}+M^*\tau^2)\langle\tau\mid\rho\rangle。\end{aligned}\tag{9.106}$$

所以$\langle\tau|$表象的引进给研究量子主方程的 c 数化带来极大的方便,这是纠缠态的又一优点。

9.8　几个物理例子

1. 由共振线性力作用的阻尼谐振子的主方程的 c 数化

受共振线性力作用的阻尼振子的量子主方程是

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\lambda[a+a^\dagger,\rho]+\frac{g}{2}(2a\rho a^\dagger-a^\dagger a\rho-\rho a^\dagger a),\tag{9.107}$$

上式两边作用于$|I\rangle$上,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\rho\rangle=\left[\mathrm{i}\lambda(a+a^{\dagger}-\tilde{a}^{\dagger}-\tilde{a})+\frac{g}{2}(2a\tilde{a}-a^{\dagger}a-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})\right]|\rho\rangle,\tag{9.108}$$

再投影到$\langle\eta|$表象：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle=\mathrm{i}\lambda(\tau^{*}+\tau)\langle\tau\mid\rho\rangle+\frac{g}{2}\langle\tau\mid(\tau\tilde{a}-\tau^{*}a)\mid\rho\rangle,\tag{9.109}$$

并用(9.101)式、(9.103)式以及

$$r\equiv|\tau|,\quad\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\tau^{*}\frac{\partial}{\partial\tau^{*}}=r\frac{\partial}{\partial r},\tag{9.110}$$

(9.109)式就化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle=\left[2\mathrm{i}\lambda r\cos\varphi-\frac{g}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+r^{2}\right)\right]\langle\tau\mid\rho\rangle。\tag{9.111}$$

为求其解，作分离变量$\langle\tau|\rho\rangle=R(r)T(t)$，代入上式得

$$\frac{T'}{T}-2\mathrm{i}\lambda\cos\varphi=-\frac{g}{2}\left(r\frac{R'}{R}+r^{2}\right)=-\mu,\tag{9.112}$$

式中μ是分离变量常数。从(9.112)式解出

$$\langle\tau\mid\rho\rangle=r^{\frac{2\mu}{g}}\exp\left(-\frac{r^{2}}{2}\right)\exp[(2\mathrm{i}\lambda\cos\varphi-\mu)t]。\tag{9.113}$$

从此解看出其有张弛过程。

方程(9.109)也可应用于当$\rho_{\alpha}=|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$的特殊情况，$|\alpha\rangle$是纯相干态，则有

$$\tilde{a}\mid\rho\rangle_{\alpha}=|\alpha\rangle\langle\alpha\mid\tilde{a}\mid I\rangle=|\alpha\rangle\langle\alpha\mid a^{\dagger}\mid I\rangle=\alpha^{*}\mid\rho\rangle_{\alpha}。\tag{9.114}$$

把(9.114)式代入(9.109)式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle_{\alpha}=\left\{\mathrm{i}\lambda(\tau^{*}+\tau)+\frac{g}{2}[\tau\alpha^{*}(t)-\tau^{*}\alpha(t)]\right\}\langle\tau\mid\rho\rangle_{\alpha}。\tag{9.115}$$

特别当$\alpha(t)=2\mathrm{i}\dfrac{\lambda}{g}$，(9.115)式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle_{\alpha=2\mathrm{i}\frac{\lambda}{g}}=0。\tag{9.116}$$

这表明方程(9.107)的纯稳态解是纯相干态

$$|\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|=|2\mathrm{i}\frac{\lambda}{g}\rangle\langle 2\mathrm{i}\frac{\lambda}{g}|。$$

当(9.109)式中 $\lambda=0$,读者可试解当 $\alpha(t)=\alpha\mathrm{e}^{-\sigma t}$($\sigma$ 是一个确定的衰减常数)时的密度矩阵。

2. 简谐振子的相扩散模型

该模型的主方程是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}&=-\gamma[a^\dagger a,[a^\dagger a,\rho]]\\&=\gamma(2a^\dagger a\rho a^\dagger a-\rho a^\dagger aa^\dagger a-a^\dagger aa^\dagger a\rho)。\end{aligned}\tag{9.117}$$

上式两边作用于 $|I\rangle$ 态,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\rho\rangle&=\frac{\gamma}{2}[2a^\dagger a\tilde{a}^\dagger\tilde{a}-(\tilde{a}^\dagger\tilde{a})^2-(a^\dagger a)^2]|\rho\rangle\\&=-\frac{\gamma}{2}(a^\dagger a-\tilde{a}^\dagger\tilde{a})^2|\rho\rangle。\end{aligned}\tag{9.118}$$

由(9.101)式,可把(9.118)式改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle=\frac{\gamma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\langle\tau\mid\rho\rangle。\tag{9.119}$$

这是相的扩散过程方程,其解是

$$\langle\tau\mid\rho\rangle=\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)(A\cos\varphi+B\sin\varphi)。\tag{9.120}$$

3. 低级近似下的激光理论

最后一例讨论以下的量子主方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=A(2a^\dagger\rho a-aa^\dagger\rho-\rho aa^\dagger)+C(2a\rho a^\dagger-a^\dagger a\rho-\rho a^\dagger a)。\tag{9.121}$$

它代表低级近似下的激光理论,式中 A 代表增益,C 代表腔的损耗。按(9.22)式,可把(9.121)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tau\mid\rho\rangle=A\langle\tau|(2a^\dagger\tilde{a}^\dagger-aa^\dagger-\tilde{a}\tilde{a}^\dagger)|\rho\rangle$$

$$+C\langle\tau|(2a\tilde{a}-a^{\dagger}a-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})|\rho\rangle。\tag{9.122}$$

由(9.101)式和(9.22)式,可得

$$\begin{aligned}\langle\tau|(2a\tilde{a}-a^{\dagger}a-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})&=\langle\tau|[(\tilde{a}-a^{\dagger})a+(a-\tilde{a}^{\dagger})\tilde{a}]\\&=\left[-\left(\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\tau^{*}\frac{\partial}{\partial\tau^{*}}\right)-\tau\tau^{*}\right]\langle\tau|,\end{aligned}\tag{9.123}$$

$$\begin{aligned}\langle\tau|(2a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}-aa^{\dagger}-\tilde{a}\tilde{a}^{\dagger})&=\langle\tau|[(\tilde{a}^{\dagger}-a)a^{\dagger}+(a^{\dagger}-\tilde{a})\tilde{a}^{\dagger}]\\&=\left[\left(\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\tau^{*}\frac{\partial}{\partial\tau^{*}}\right)-\tau\tau^{*}\right]\langle\tau|。\end{aligned}\tag{9.124}$$

于是(9.122)式化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\tau|\rho\rangle=\left[(A-C)r\frac{\partial}{\partial r}-(A+C)r^{2}\right]\langle\eta|\rho\rangle,\tag{9.125}$$

其解为

$$\langle\tau|\rho\rangle=r^{\frac{\sigma}{A-C}}\exp\left[\frac{A+C}{2(A-C)}r^{2}+\sigma t\right],\tag{9.126}$$

式中 σ 为任意常数。而(9.125)式的稳定解为

$$\langle\tau|\rho\rangle=\exp\left(-\frac{r^{2}}{2}\frac{C+A}{C-A}\right)。$$

解出了$\langle\tau|\rho\rangle$后,由$|\tau\rangle$的完备性可继续求出$|\rho\rangle$来,即在(9.126)式两边乘上$\int\frac{\mathrm{d}^{2}\tau}{\pi}|\tau\rangle$积分,其左边为$\int\frac{\mathrm{d}^{2}\tau}{\pi}|\tau\rangle\langle\tau|\rho\rangle=|\rho\rangle$,而其右边的积分会给出$|\rho\rangle=\rho|I\rangle$,从而得到$\rho$。

9.9　热激发态表象

由热纠缠态$|\tau\rangle$可以引入一个新的态:

$$|E,g\rangle=\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}|\tau=\sqrt{g}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E\varphi},\tag{9.127}$$

它满足本征方程:

$$h|E,g\rangle=E|E,g\rangle,\tag{9.128}$$

式中 h 是哈密顿量，$h=a^{\dagger}a-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}$。且有

$$(a-\tilde{a}^{\dagger})(a^{\dagger}-\tilde{a})\mid E,g\rangle=g\mid E,g\rangle。$$

(9.128)式的证明如下：由于

$$h\mid\tau\rangle=(\tau a^{\dagger}+\tau^{*}\tilde{a}^{\dagger})\mid\tau\rangle=\sqrt{g}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}a^{\dagger}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\tilde{a}^{\dagger})\mid\tau\rangle$$
$$=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mid\tau\rangle,\tag{9.129}$$

故有

$$h\mid E,g\rangle=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\mid\tau\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E\varphi}=E\mid E,g\rangle。\tag{9.130}$$

由

$$\begin{aligned}h(\tilde{a}-a^{\dagger})\mid E,g\rangle&=(E+1)(\tilde{a}-a^{\dagger})\mid E,g\rangle,\\ h(a-\tilde{a}^{\dagger})\mid E,g\rangle&=(E-1)(a-\tilde{a}^{\dagger})\mid E,g\rangle,\end{aligned}\tag{9.131}$$

可称$|E,g\rangle$为热激发态，而 $\tilde{a}-a^{\dagger}$ 与 $a-\tilde{a}^{\dagger}$ 分别称为上升与下降算符。由$|\tau\rangle$的完备性可证

$$\sum_{E=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}g\mid E,g\rangle\langle E,g\mid=1,\tag{9.132}$$

于是上升、下降算符可表示为

$$\begin{aligned}\tilde{a}-a^{\dagger}&=\sum_{E=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}g\mid E+1,g\rangle\langle E,g\mid,\\ a-\tilde{a}^{\dagger}&=\sum_{E=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}g\mid E-1,g\rangle\langle E,g\mid。\end{aligned}\tag{9.133}$$

另一方面，可证

$$\langle E,g\mid E',g'\rangle=\delta_{E,E'}\delta(g-g')。\tag{9.134}$$

所以，$|E,g\rangle$有资格成为一个表象。

9.10　热 Wigner 算符及应用

用热纠缠态表象$|\tau\rangle$可以引入所谓的热 Wigner 算符：

$$\Delta_{\mathrm{T}}(\sigma,\gamma)=\int\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\pi^3}\mid\sigma-\tau\rangle\langle\sigma+\tau\mid\exp(\tau\gamma^{*}-\gamma\tau^{*}),\tag{9.135}$$

式中 Δ_T 的下标 T 意指“热”。用有序算符内的积分技术可证明

$$\Delta_T(\sigma,\gamma)=\pi^{-2}:\exp[-2(a^{\dagger}-\alpha^{*})(a-\alpha)-2(\tilde{a}^{\dagger}-\varepsilon^{*})(\tilde{a}-\varepsilon)]:, \tag{9.136}$$

式中

$$\gamma=\alpha+\varepsilon^{*},\quad \sigma=\alpha-\varepsilon^{*}。 \tag{9.137}$$

对(9.136)式中的“虚构”模式求迹，以 Tr_β 表示此运算，得

$$\begin{aligned}2\mathrm{Tr}_\beta\,\Delta_T(\sigma,\gamma)&=2\mathrm{Tr}_\beta\left[\Delta_T(\sigma,\gamma)\int d^2\tilde{z}\mid\tilde{z}\rangle\langle\tilde{z}\mid\right]\\&=2\int\frac{d^2\tilde{z}}{\pi^2}\langle\tilde{z}\mid:\exp[-2(a^{\dagger}-\alpha^{*})(a-\alpha)\\&\quad-2(\tilde{a}^{\dagger}-\varepsilon^{*})(\tilde{a}-\varepsilon)]:\mid\tilde{z}\rangle\\&=\pi^{-1}:\exp[-2(a^{\dagger}-\alpha^{*})(a-\alpha)]:\\&=\Delta(\alpha)。\end{aligned} \tag{9.138}$$

这正好是在实场态矢空间中的单模 Wigner 算符。可以把(9.138)式简写为(注意(9.137)式)

$$\Delta(\alpha)=2\int d^2\varepsilon\Delta_T(\sigma,\gamma), \tag{9.139}$$

这是因为(9.136)式是有序算符内的正规乘积。利用(9.139)式可以方便地求有关热场的 Wigner 函数，例如，求热真空态的 Wigner 函数。由(9.139)式得

$$\langle 0(\beta)\mid\Delta(\alpha)\mid 0(\beta)\rangle=2\int d^2\varepsilon\langle 0,\tilde{0}\mid s^{-1}(\theta)\Delta_T(\sigma,\gamma)s(\theta)\mid 0,\tilde{0}\rangle. \tag{9.140}$$

用热算符 $s(\theta)$在$|\tau\rangle$表象中的表示(9.19)式及(9.135)式和(9.20)式，可证

$$\begin{gathered}s^{-1}(\theta)\Delta_T(\sigma,\gamma)s(\theta)=\Delta_T\left(\frac{\gamma}{\mu},\mu\sigma\right),\\ \tanh\theta=\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}。\end{gathered} \tag{9.141}$$

代入(9.140)式，并用(9.137)式积分，得

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta) \mid \Delta(\alpha) \mid 0(\beta)\rangle &= 2\int \frac{d^2\varepsilon}{\pi^2}\exp\left(-\mid \sigma \mid^2\mu^2 - \frac{\mid \gamma \mid^2}{\mu^2}\right) \\ &= 2\int \frac{d^2\varepsilon}{\pi^2}\exp\left[(\varepsilon\alpha + \varepsilon^*\alpha^*)\left(\mu^2 - \frac{1}{\mu^2}\right)\right. \\ &\quad \left. -\mid \varepsilon \mid^2\left(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2}\right) - \frac{\mu^4+1}{\mu^2}\mid \alpha \mid^2\right] \\ &= \frac{2\mu^2}{\pi(1+\mu^4)}\exp\left(\frac{-2\mu^2}{1+\mu^4}\mid \alpha \mid^2\right)。\end{aligned} \tag{9.142}$$

由于

$$\frac{2\mu^2}{1+\mu^4} = \frac{1-e^{-\beta\omega}}{1+e^{-\beta\omega}}, \quad \tanh\theta = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right), \quad \hbar = 1, \tag{9.143}$$

所以

$$\langle 0(\beta) \mid \Delta(\alpha) \mid 0(\beta)\rangle = \frac{1-e^{-\beta\omega}}{\pi(1+e^{-\beta\omega})}\exp\left[\frac{-2(1-e^{-\beta\omega})}{1+e^{-\beta\omega}}\mid \alpha \mid^2\right]。 \tag{9.144}$$

得到了热真空态的 Wigner 函数,就可以根据第四章的 Weyl 对应求粒子数 a^+a 的统计平均,鉴于 a^+a 的经典 Weyl 对应函数是 $\alpha^*\alpha-\frac{1}{2}$,因此有

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta) \mid a^+a \mid 0(\beta)\rangle &= 2\int d^2\alpha\left(\mid \alpha \mid^2 - \frac{1}{2}\right)\langle 0(\beta) \mid \Delta(\alpha) \mid 0(\beta)\rangle \\ &= (e^{\beta\omega}-1)^{-1},\end{aligned}$$

这恰是玻色统计中熟知的粒子数期望值。

综上所述,由于在热场动力学中引入了热纠缠态表象,对于量子光场的相空间函数计算和将量子主方程的化解为经典 c 数方程都引来了新的计算途径,在有些具体问题上表现的物理意义也更加明确,这也许是因为热动力学存在"虚构"自由度的原因,而其本身就是一个"纠缠"的体系。

第十章

广义相位-振幅量子纠缠[83]、[84]

10.1 纠缠态$|\eta\rangle$所体现的关联振幅-操作相纠缠

引入$|\eta\rangle$态的另一个优点是从它可以悟出另一个新的量子纠缠概念，即“关联振幅”-“操作相”纠缠。正如一个谐振子既可以由振子的位置与动量描写状态，也可以用相位、振幅、频率来描写一样，除了用坐标-动量测量的观点来分析双粒子纠缠态外，也可以用振幅-相位测量的角度来分析$|\eta\rangle$态所蕴含的量子纠缠性。

首先从类比与坐标、动量有关的纠缠算符着手（见(2.13)式下的说明），看看是否能通过引入一个与相位与粒子数有关的纠缠算符，例如取$\exp(\mathrm{i}N_1\ \widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}})$，把第一个模的相位态$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rangle_1$与处于第二个模的数态$|n\rangle_2$（注意数态与相态相互正则共轭）纠缠为一个数-相纠缠态，即考察

$$\exp(\mathrm{i}N_1\ \widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}})\ |\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rangle_1 \otimes |\ n\rangle_2, \tag{10.1}$$

式中$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}$是 Susskind-Glogower(SG)单模相算符[85]：

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{1}{\sqrt{N_2+1}}a_2, \tag{10.2}$$

而

$$|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rangle_1 = \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}a_1^\dagger\ \sqrt{N_1+1})\,|\ 0\rangle_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n}}{n!}(a_1^\dagger\ \sqrt{N_1+1})^n\ |\ 0\rangle_1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta n} \mid n\rangle_1 。\tag{10.3}$$

由于

$$\left[\frac{1}{\sqrt{N_1+1}}a_1, a_1^\dagger \sqrt{N_1+1}\right] = 1, \tag{10.4}$$

所以

$$\widehat{e^{i\theta_1}} \mid e^{i\theta}\rangle_1 = e^{i\theta} \mid e^{i\theta}\rangle_1, \ N_1 \mid e^{i\theta}\rangle_1 = -i\frac{\partial}{\partial\theta} \mid e^{i\theta}\rangle_1 。\tag{10.5}$$

但是从(10.2)式中看到的 $\widehat{e^{i\theta_2}} \mid n\rangle_2 = (1-\delta_{n,0})\mid n-1\rangle_2$ 暗示着 $\widehat{e^{i\theta_2}}$ 不是一个幺正算符，所以 $\exp(iN_1 \widehat{e^{i\theta_2}})$ 也不是一个幺正算符，它不能担当数-相意义下的纠缠角色。

另一种考虑数-相纠缠的思路是鉴于对易关系：

$$[\widehat{e^{i\theta_1}} \widehat{e^{-i\theta}}, N_1 + N_2] = 0。$$

但是由于 SG 相算符的非幺正性，这个方案也不理想。

于是还是分析纠缠态 $|\eta\rangle$ 是否蕴含了有关相-振幅意义下的量子纠缠。仍从 $[X_1 - X_2, P_1 + P_2] = 0$ 出发，考虑其相应的经典相空间(但是这一次不是分别考虑孤立的 (x_i, p_i) 空间，$i=1$ 或 2，而是建立以 $(x_1 - x_2)$ 和 $(p_1 + p_2)$ 为横轴和纵轴的相空间，其原点为 $x_1 - x_2 = 0$，$p_1 + p_2 = 0$)，在这个相空间中，矢径的平方 $(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2$ 相应于算符 $(X_1 - X_2)^2 + (P_1 + P_2)^2$，而此空间中转动角的 cos 值，即 $\cos\varphi = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 + p_2)^2}}$ 相应于算符

$$\begin{aligned}\cos\Phi &= \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (P_1 + P_2)^2}} \\ &= \frac{a_1 + a_1^\dagger - a_2 - a_2^\dagger}{2\sqrt{(a_1 - a_2^\dagger)(a_1^\dagger - a_2)}} \\ &= \frac{1}{2}(e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}),\end{aligned} \tag{10.6}$$

式中[88]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \equiv \sqrt{\frac{a_1 - a_2^\dagger}{a_1^\dagger - a_2}} \tag{10.7}$$

在$|\eta\rangle$表象内表现为相算符(因为$[a_1 - a_2^\dagger, a_1^\dagger - a_2] = 0$,所以它们可以置于同一根式下),即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} |\eta\rangle = \left(\frac{\eta}{\eta^*}\right)^{\frac{1}{2}} |\eta\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} |\eta\rangle。 \tag{10.8}$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$在$|\eta\rangle$表象内对角,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} = \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} |\eta\rangle\langle\eta|。$$

事有凑巧,Mandel 等人[86],[87]在用八端口的拍频干涉仪装置检测被测光与参考光相位差的时候,也从测量中抽象出了一个“操作相位算符”,它恰好是以(10.7)式表示的。

类似于$a_1 = \sqrt{N_1 + 1}\, \mathrm{e}^{\widehat{i\theta_1}}$,作以下的极分解:

$$a_1 - a_2^\dagger = \sqrt{\mathscr{A}^\dagger \mathscr{A}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi},\ a_1^\dagger - a_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} \sqrt{\mathscr{A}^\dagger \mathscr{A}}, \tag{10.9}$$

式中

$$\mathscr{A}^\dagger \mathscr{A} = (a_1^\dagger - a_2)(a_1 - a_2^\dagger) = (X_1 - X_2)^2 + (P_1 + P_2)^2 \tag{10.10}$$

称为“关联振幅算符”,它与“操作相位算符”对易:

$$[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}, \mathscr{A}^\dagger \mathscr{A}] = 0。 \tag{10.11}$$

$|\eta\rangle$还是$\mathscr{A}^\dagger \mathscr{A}$的本征态,本征值是$|\eta|^2$,代表一个振幅,

$$\mathscr{A}^\dagger \mathscr{A} |\eta\rangle = |\eta|^2 |\eta\rangle。 \tag{10.12}$$

结合(10.7)式和(10.12)式可见,$|\eta\rangle$显示了在关联振幅-操作相方面的量子纠缠。

由于$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$是幺正的,$\Phi$是厄米特算符,从(10.7)式导出角算符:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int (\ln\eta - \ln\eta^*) |\eta\rangle\langle\eta| \mathrm{d}^2\eta = -\frac{\mathrm{i}}{2} \ln \frac{a_1 - a_2^\dagger}{a_1^\dagger - a_2}。 \tag{10.13}$$

注意到$[\mathscr{A}^{\dagger}\mathscr{A},\Phi]=0$,即在相应的$c$数空间(由$x_1-x_2$与$p_1+p_2$轴张成的空间)中,(半径)^{2}与转角对易,它们可以同时被精确地测量,这就说明了为什么$|\eta\rangle$蕴含了关联振幅-操作相纠缠。这一点与在单个(x_i,p_i)的相空间中的情况截然不同,与(x_i,p_i)对应的算符对易关系为$[X_i,P_i]=\mathrm{i}\hbar$,相应的海森堡测不准关系$\Delta X_i\Delta P_i\sim\hbar$,当把这个直角坐标下的小方块面积测不准量转化为半径-角极坐标系统时,测不准量变换为一个扇形面积$R_i\Delta\theta_i\Delta R_i$,即与转角$\theta_i$及半径$R_i=\sqrt{x_i^2+p_i^2}$对应的两个算符之间不对易,所以不能被同时精确地测量。

10.2　数差-关联振幅纠缠

为了进一步揭示与$|\eta\rangle$有关的新的量子纠缠概念,注意到在量子力学中除了基本对易关系$[X,P]=\mathrm{i}\hbar$外,还有一个定义得不是很完美的对易关系$\left[\varphi,-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right]=\mathrm{i}\hbar$。如果把$\varphi$对应于$|\eta\rangle$表象中的$\Phi$角,即$\Phi=\int\dfrac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\varphi|\eta\rangle\langle\eta|$,那么什么算符在$\langle\eta|$表象内对应于$\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$呢? 事实上,由

$$\begin{aligned}(a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2)|\eta\rangle&=[a_1^{\dagger}(\eta+a_2^{\dagger})-a_2^{\dagger}(-\eta^*+a_1^{\dagger})]|\eta\rangle\\&=|\eta|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}a_1^{\dagger}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}a_2^{\dagger})\exp\left[-\frac{1}{2}|\eta|^2\right.\\&\quad\left.+|\eta|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}a_1^{\dagger}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}a_2^{\dagger})+a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\right]|0,0\rangle\\&=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}|\eta\rangle,\end{aligned}\tag{10.14}$$

可见双模粒子数差与Φ是互为正则共轭的量。也就是说,$|\eta\rangle$表象又提供了讨论数差-相纠缠的载体,即尽管

$$[a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}]=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi},\tag{10.15}$$

也有

$$[\Phi, a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2] = \mathrm{i}。\tag{10.16}$$

与单模情况相比，尽管 $a_1^\dagger a_1$ 与单模光场的 Susskind-Glogower 相算符 $\widehat{e^{i\theta_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_1^\dagger a_1 + 1}} a_1$ 的对易关系

$$[a_1^\dagger a_1, \widehat{e^{i\theta_1}}] = - \widehat{e^{i\theta_1}}\tag{10.17}$$

与(10.15)式的形式类似，但振幅(相应于光子数 $a_1^\dagger a_1$)与相不能同时确定。但是对于双模情形，“关联振幅”$(a_1 - a_2^\dagger)(a_2 - a_1^\dagger)$与数差算符对易：

$$[a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2, (a_1 - a_2^\dagger)(a_1^\dagger - a_2)] = 0,\tag{10.18}$$

因此它们有共同的本征态，它蕴含了数差-关联振幅纠缠。

数差-关联振幅纠缠的一个实验证据是一对光子的计数纠缠实验。设从一个光子源发射出运动方向相反的两束光，其总角动量为零。在光路 1 中加一个起偏器 1，则光路 2 上光子被探测器接受而检测到的几率会受到光路 1 上起偏器 1 的取向起偏角度的影响，而不管这两路光分隔得有多远。这种纠缠性可以解释为：由于光子对的内禀角动量算符是

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{k} = \hbar[a_\mathrm{R}^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\mathrm{R}(\boldsymbol{k}) - a_\mathrm{L}^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\mathrm{L}(\boldsymbol{k})],\tag{10.19}$$

式中 $a_\mathrm{R}(\boldsymbol{k})$代表动量为 $\boldsymbol{k}$ 的右旋光子的湮灭算符，$a_\mathrm{L}(\boldsymbol{k})$则表示左旋偏振，$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{k}$ 与偏振强度算符$(a_\mathrm{L} - a_\mathrm{R}^\dagger)(a_\mathrm{R} - a_\mathrm{L}^\dagger)$的对易子

$$[\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{k}, (a_\mathrm{L} - a_\mathrm{R}^\dagger)(a_\mathrm{R} - a_\mathrm{L}^\dagger)] = 0,\tag{10.20}$$

表明 $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{k}$ 是一个守恒量。光路 1 中起偏器的转动改变了左旋偏振与右旋偏振的比例，所以发生上述光子计数的关联现象。

以上讨论表明纠缠态表象$|\eta\rangle$的建立不但能反映二粒子相对坐标-总动量方面存在的纠缠，而且导致了新的纠缠性即数(关联振幅)-相纠缠的发现，这种纠缠体现在以下两种情形中[89]：

$$\text{关联振幅} \longleftrightarrow \text{相 } \Phi;$$

$$\text{关联振幅} \longleftrightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\text{数差，相的共轭})。$$

关于后一种情况，量子力学中还有另一个例子，那就是电子在均匀磁场中的运动，其角动量与轨道半径的平方算符是对易的，它体现了三种纠缠，注意这是电子与磁场两体相互作用的结果。

10.3　基于双模数差和操作相的广义 Jaynes-Cummings 模型

能描述光与原子相互作用的最基本模型是 Jaynes-Cummings 模型[90]：

$$H=\bar{\omega}a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\Omega\sigma_z+\lambda(\sigma_+a+a^{\dagger}\sigma_-)\qquad(10.21)$$

式中 $\bar{\omega}$ 是光场的频率，Ω 是原子的跃迁频率，$\sigma_{\pm}$ 是泡利矩阵，λ 是光场与原子的耦合常数，$a^{\dagger}$ 是光场的产生算符。两能级系统由泡利自旋算符描述。在文献[91]中曾提出用建立超对称生成元的办法对角化 H。以下将用双模数差算符和操作相位算符构建一个广义的 J-C 模型，并用超对称办法解之。

新建 J-C 模型的哈密顿量是[92]

$$\begin{aligned}\mathscr{H}=&\bar{\omega}(a^{\dagger}a-b^{\dagger}b)+\frac{1}{2}\sigma_z\Omega+\lambda\Big(\sigma_+\sqrt{\frac{a-b^{\dagger}}{a^{\dagger}-b}}\sqrt{a^{\dagger}a-b^{\dagger}b}\\&+\sqrt{a^{\dagger}a-b^{\dagger}b}\sqrt{\frac{a^{\dagger}-b}{a-b^{\dagger}}}\sigma_-\Big),\end{aligned}\qquad(10.22)$$

式中 $\sqrt{\frac{a^{\dagger}-b}{a-b^{\dagger}}}$ 是操作相位算符。为了给(10.22)式一个物理解释，先引入态矢量

$$\|\mathcal{N}_d,m\rangle=\left(\sqrt{\frac{a^{\dagger}-b}{a-b^{\dagger}}}\right)^{\mathcal{N}_d}|m,m\rangle,\qquad(10.23)$$

式中 $|m,m\rangle$ 是双模“双胞胎”数态。用对易关系

$$\left[a^{\dagger}a-b^{\dagger}b,\sqrt{\frac{a^{\dagger}-b}{a-b^{\dagger}}}\right]=\sqrt{\frac{a^{\dagger}-b}{a-b^{\dagger}}},\qquad(10.24)$$

易证

$$(a^\dagger a-b^\dagger b)\,\|\mathcal{N}_d,m\rangle=\left[(a^\dagger a-b^\dagger b),\left(\sqrt{\frac{a^\dagger-b}{a-b^\dagger}}\right)^{\mathcal{N}_d}\right]|\,m,m\rangle$$

$$=\mathcal{N}_d\,\|\mathcal{N}_d,m\rangle, \tag{10.25}$$

即 $\|\mathcal{N}_d,m\rangle$ 是一个数-差算符的本征矢。基于此，给 H 的物理解释是：由于

$$\sqrt{\frac{a-b^\dagger}{a^\dagger-b}}\,\|\mathcal{N}_d,m\rangle=\|\mathcal{N}_d-1,m\rangle, \tag{10.26}$$

(10.22)式中 $\sigma_+\sqrt{\frac{a-b^\dagger}{a^\dagger-b}}\sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}$ 项代表原子受双模光场净数差的激发从下能级跳到上能级，在这个过程中相互作用与 $\sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}$ 成正比；而(10.22)式中的另一项 $\sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}\cdot\sqrt{\frac{a^\dagger-b}{a-b^\dagger}}\sigma_-$ 则代表相反的过程。这种情况也许会发生在双光子介质中的非线性过程(非线性增益或吸收)中(取决于光的两种模式相互竞争的结果)。不难证明 $\|\mathcal{N}_d,m\rangle$ 张成一个正交、完备的空间：

$$\sum_{\mathcal{N}_d=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\|\mathcal{N}_d,m\rangle\langle\mathcal{N}_d,m\|=1, \tag{10.27}$$

$$\langle\mathcal{N}'_d,m'\|\mathcal{N}_d,m\rangle=\delta_{m,m'}\delta_{\mathcal{N}_d,\mathcal{N}'_d}。 \tag{10.28}$$

在明确了(10.22)式的物理意义后，构造相应的超对称生成元：

$$\left(\sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}\sqrt{\frac{a^\dagger-b}{a-b^\dagger}}\right)\sigma_-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}\sqrt{\frac{a^\dagger-b}{a-b^\dagger}} & 0\end{pmatrix}\equiv Q, \tag{10.29}$$

$$\sigma_+\left(\sqrt{\frac{a-b^\dagger}{a^\dagger-b}}\sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}\right)=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{\frac{a-b^\dagger}{a^\dagger-b}}\sqrt{a^\dagger a-b^\dagger b}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\equiv Q^\dagger. \tag{10.30}$$

以及

$$N=a^{\dagger}a-b^{\dagger}b+\frac{1}{2}\sigma_z+\frac{1}{2}=\begin{pmatrix} aa^{\dagger}-b^{\dagger}b & 0 \\ 0 & a^{\dagger}a-b^{\dagger}b \end{pmatrix}, \tag{10.31}$$

则从对易关系(10.24)式与 Pauli 矩阵的对易关系,得

$$Q^2=0=Q^{\dagger 2},\ [Q^{\dagger},Q]=N\sigma_z,\ \{Q,\sigma_z\}=\{Q^{\dagger},\sigma_z\}=0, \tag{10.32}$$

$$N=\{Q,Q^{\dagger}\},\ [N,Q]=[N,Q^{\dagger}]=0,\ (Q^{\dagger}-Q)^2=-N, \tag{10.33}$$

式中{　,　}代表反对易关系。根据超对称量子力学的理论[93],称$(N,Q,Q^{\dagger})$是超对称生成元,取

$$N^{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{aa^{\dagger}-b^{\dagger}b}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a^{\dagger}a-b^{\dagger}b}} \end{pmatrix}, \tag{10.34}$$

则有

$$[N^{-\frac{1}{2}},Q]=0,\quad [N^{-\frac{1}{2}},Q^{\dagger}]=0。$$

定义一个幺正算符,它是超对称生成元:

$$\begin{aligned} T&=\exp\left[-\frac{\theta}{2}N^{-\frac{1}{2}}(Q^{\dagger}-Q)\right] \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k}(-1)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^{2k-1} \\ &\quad\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{N}}(Q^{\dagger}-Q)\right]^{2k-1} \\ &=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}(Q^{\dagger}-Q), \end{aligned} \tag{10.35}$$

则有

$$T^{-1}(Q+Q^{\dagger})T=\cos\theta(Q+Q^{\dagger})+\sin\theta\frac{1}{\sqrt{N}}[Q^{\dagger},Q]。 \tag{10.36}$$

注意到

$$(Q^\dagger - Q)\sigma_z = -\sigma_z(Q^\dagger - Q) = -(Q + Q^\dagger), \quad (10.37)$$

故有

$$T^{-1}\sigma_z T = \sigma_z T^2 = \frac{1}{N}[Q^\dagger, Q]\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{N}}(Q + Q^\dagger)\sin\theta。 \quad (10.38)$$

引入矢谐量 $\Delta = \Omega - \bar{\omega}$，在 T 变换下

$$\begin{aligned} T^{-1}\mathscr{H}T &= T^{-1}\left[\bar{\omega}N + \frac{\Delta}{2}\sigma_z - \frac{\bar{\omega}}{2} + \lambda(Q + Q^\dagger)\right]T \\ &= \bar{\omega}N + \left(\lambda\cos\theta - \frac{\Delta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sin\theta\right)(Q + Q^\dagger) \\ &\quad + \left(\lambda\sin\theta - \frac{\Delta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\cos\theta\right)\frac{1}{\sqrt{N}}[Q^\dagger, Q] - \frac{\bar{\omega}}{2}。 \end{aligned} \quad (10.39)$$

选 θ 满足

$$\frac{2\lambda}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{N}}\tan\theta, \quad (10.40)$$

故(10.39)式变成

$$T^{-1}\mathscr{H}T = \bar{\omega}N + \frac{\Delta}{2\cos\theta}\sigma_z - \frac{\bar{\omega}}{2}。 \quad (10.41)$$

必须指出，方程(10.40)是要在 N 的本征方程和本征值的意义下理解的。N 的本征矢是双模 Fock 空间中的态矢 $\| \mathscr{N}_d, m\rangle$ 与原子自旋态 $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的直积，即

$$\Psi_{1,\mathscr{N}_d+1} = \begin{pmatrix}\| \mathscr{N}_d, m\rangle \\ 0\end{pmatrix} \equiv |\uparrow, \mathscr{N}_d, m\rangle$$

与

$$\Psi_{2,\mathscr{N}_d+1} = \begin{pmatrix}0 \\ \| \mathscr{N}_d + 1, m\rangle\end{pmatrix} \equiv |\downarrow, \mathscr{N}_d + 1, m\rangle \quad (10.42)$$

满足

$$N\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1}=(\mathcal{N}_d+1)\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1},$$
$$N\Psi_{2,\mathcal{N}_d+1}=(\mathcal{N}_d+1)\Psi_{2,\mathcal{N}_d+1}。\tag{10.43}$$

当 θ 取值为

$$\frac{2\lambda}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_d+1}}\tan\theta,\tag{10.44}$$

(10.41)式给出

$$(T^{-1}\mathcal{H}T)\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1}=\left[\bar{\omega}(\mathcal{N}_d+1)+\frac{\Delta}{2\cos\theta}-\frac{\bar{\omega}}{2}\right]\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1},$$
$$(T^{-1}\mathcal{H}T)\Psi_{2,\mathcal{N}_d+1}=\left[\bar{\omega}\mathcal{N}_d-\frac{\Delta}{2\cos\theta}+\frac{\bar{\omega}}{2}\right]\Psi_{2,\mathcal{N}_d+1},\tag{10.45}$$

而 $T\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1}$，$T\Psi_{2,\mathcal{N}_d+1}$ 是 $\mathcal{H}$ 的本征矢：

$$T\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1}=\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\|\mathcal{N}_d,m\rangle\\0\end{pmatrix}+\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\\|\mathcal{N}_d+1,m\rangle\end{pmatrix},$$
$$\Psi_{1,\mathcal{N}_d+1}=\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\\|\mathcal{N}_d+1,m\rangle\end{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\|\mathcal{N}_d,m\rangle\\0\end{pmatrix}。\tag{10.46}$$

以上超对称变化对角化了(10.22)式。注意以上的讨论不适合于态 $|\downarrow,0,m\rangle$ 和 $|\uparrow,-1,m\rangle$，这是由于 $\mathcal{N}^{-\frac{1}{2}}$ 作用于这两个态上会造成奇异性。不过，可以看出

$$\mathcal{H}|\downarrow,0,m\rangle=-\frac{1}{2}\Omega|\downarrow,0,m\rangle,$$
$$\mathcal{H}|\uparrow,-1,m\rangle=\left(-\bar{\omega}+\frac{\Omega}{2}\right)|\uparrow,-1,m\rangle,\tag{10.47}$$

所以这两个态也是 $\mathcal{H}$ 的本征态。

10.4　数差-操作相意义下的 Wigner 函数及其边缘分布[94]

前面已经知道，在坐标-动量相空间中 Wigner 函数的主要特点是它的边缘分布分别给出测量粒子在 x 坐标上的几率和在 p

动量上的几率，于是自然就会联想到是否存在一种与粒子数-相位有关的 Wigner 分布函数，其边缘分布分别对应于测量到粒子数和相位的独立几率呢？

由于量子光学中 Susskind-Glogower 相算符 $e^{i\theta}=\frac{1}{\sqrt{N+1}}a$ 不是严格意义下的幺正算符，θ 也不是厄米特算符，所以要在单模 Fock 空间中引入相应的数-相 Wigner 函数，使其边缘分布有明确的物理意义是困难的。但发现如果采用操作相算符及双模 Fock 空间中的数差算符来引入相应的操作相-数差意义下的 Wigner 函数则是可行的，其原因是操作相算符是幺正的。例如从 $a_1-a_2^\dagger$ 及 $a_1^\dagger-a_2$ 的共同本征态 $|\eta\rangle$ 可以导出

$$|n_d,r\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\ |\eta=re^{i\varphi}\rangle\exp(-in_d\varphi)。\quad(10.48)$$

用(10.7)式中的 $e^{i\Phi}$ 作用之，得

$$\begin{aligned}e^{i\Phi}|n_d,r\rangle&=|n_d-1,r\rangle,\\ e^{-i\Phi}|n_d,r\rangle&=|n_d+1,r\rangle。\end{aligned}\quad(10.49)$$

(10.48)式的逆关系是

$$\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}|n_d,r\rangle\exp(in_d\varphi)=|\eta\rangle。\quad(10.50)$$

记 $N_d=a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2$，则$[\Phi,N_d]=i$。

由于 $|n_d,r\rangle$ 是完备的表象，

$$\begin{aligned}&\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r^2\ |n_d,r\rangle\langle n_d,r|=1,\\ &\langle n_d,r|n_d',r'\rangle=\frac{1}{2r}\delta(r'-r)\delta_{n_d,n_d'},\end{aligned}\quad(10.51)$$

就可以利用 $|n_d,r\rangle$ 讨论数-相 Wigner 函数。引入相应的特征函数

$$C(s,\theta)\equiv\mathrm{Tr}\{\exp[i(s\hat{\Phi}-\theta\hat{N}_d)]\rho\},\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad(10.52)$$

式中 ρ 是密度矩阵。利用(10.51)式，可以把 ρ 展开为

$$\rho=\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\sum_{n'_d=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r'^2 Q_{n_d,n'_d}(r,r')\mid n_d,r\rangle\langle n'_d,r'\mid,\tag{10.53}$$

式中

$$Q_{n_d,n'_d}=\langle n_d,r\mid\rho\mid n'_d,r'\rangle。\tag{10.54}$$

于是有

$$\begin{aligned}C(s,\theta)=&\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r^2\sum_{n'_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r'^2 Q_{n_d,n'_d}(r,r')\\&\cdot\exp\left(-\frac{\mathrm{i}s\theta}{2}\right)\langle n'_d,r'\mid\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Phi}\exp(-\mathrm{i}\theta N_d)\mid n_d,r\rangle\\=&\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r^2\sum_{n'_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r'^2 Q_{n_d,n'_d}(r,r')\\&\cdot\exp\left(-\frac{\mathrm{i}s\theta}{2}\right)\langle n'_d,r'\mid n_d-s,r\rangle\exp(\mathrm{i}\theta n_d)\\=&\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r^2\sum_{n'_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r'^2 Q_{n_d,n'_d}(r,r')\\&\cdot\delta_{n'_d,n_d-s}\frac{1}{2r}\delta(r'-r)\exp(-\mathrm{i}\theta n_d)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}s\theta}{2}\right)\\=&\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r^2 Q_{n_d,n_d-s}(r,r)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}s\theta}{2}\right)\exp(-\mathrm{i}\theta n_d)。\end{aligned}\tag{10.55}$$

特征函数与 Wigner 函数的关系是

$$\begin{aligned}W(n,\varphi)=&\frac{1}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta C(s,\theta)\exp[-\mathrm{i}(\varphi s-\theta n_d)]\\=&\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r^2 Q_{n_d,n_d-s}(r,r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi s}\delta\left(-\frac{s}{2}+n-n_d\right)\\=&\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\mathrm{d}r^2 Q_{-\frac{s}{2}+n,-\frac{3s}{2}+n}(r,r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi s},\end{aligned}\tag{10.56}$$

或写为

$$W(n,\varphi)=\int \mathrm{d}r^2\sum_{s=-\infty}^{\infty}\langle -\frac{s}{2}+n,r|\rho|-\frac{3s}{2}+n,r\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi s}。\tag{10.57}$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_n W(n,\varphi)&=\int \mathrm{d}r^2\sum_n\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi''}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi'}{2\pi}\exp\left[\mathrm{i}\varphi''\left(-\frac{s}{2}+n\right)\right]\langle\eta''\\&=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi''}\mid\rho\mid\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\rangle\exp\left[-\mathrm{i}\varphi'\left(-\frac{3s}{2}+n\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi s}\\&=\int \mathrm{d}r^2\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi''}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi'}{2\pi}\langle\eta''=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi''}\mid\rho\mid\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\rangle\\&\quad\cdot\delta(\varphi'-\varphi'')\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\varphi''s}{2}\right)\exp\left(\frac{3\mathrm{i}\varphi's}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi s}\\&=\int \mathrm{d}r^2\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi'}{2\pi}\langle\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\mid\rho\mid\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi' s}\\&=\int \mathrm{d}r^2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi'}{2\pi}\langle\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\mid\rho\mid\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\rangle\delta(\varphi-\varphi')\\&=\int \mathrm{d}r^2\langle\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mid\rho\mid\eta'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\rangle\\&=P(\varphi)。\end{aligned}\tag{10.58}$$

这表明数-相 Wigner 函数的一个边缘分布正好是相分布函数。另一方面，对 $W(n,\varphi)$ 的角度部分积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}W(n,\varphi)\mathrm{d}\varphi&=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}r^2 Q_{-\frac{s}{2}+n,-\frac{3s}{2}+n}(r,r)\delta(s)\\&=\int \mathrm{d}r^2 Q_{n,n}(r,r)=P(n)。\end{aligned}\tag{10.59}$$

这正好给出了两种模式光子数之差的分布。

以上讨论表明在双模光场情况下，利用操作相算符与纠缠态表象及其诱导表象，使得数差-操作相意义下的 Wigner 函数具有明确的物理意义，即其边缘分布分别给出相分布函数与数差的分布。

习　　题

1. 设初态为两个独立的粒子态$|n_1\rangle_a|n_2\rangle_b$,求经过一个光分束器变换后的输出态,它是否是一个纠缠态?

2. 对上述输出态,求 von Neumann 熵,其定义为

$$\rho = \mathrm{Tr}\mathscr{B} \mid n_1, n_2\rangle\langle n_1, n_2 \mid \mathscr{B}^\dagger,$$

式中$\mathscr{B}$是光分束器变换算符,由(2.81)式给出。

3. 为了描述光子的偏振情况,例如描述左旋、右旋或圆偏振光,在经典光学中常用一个相差$e^{i\delta}$来表示,其推导如下:

当一束光在x,y方向上的电场分别是

$$E_x = A_1\cos(\omega t + \delta_1), \quad E_y = A_2\cos(\omega t + \delta_2),$$

那么在这两个方程中消去ωt,得

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{A_1}\frac{E_y}{A_2}\cos\delta = \sin^2\delta, \quad \delta = \delta_2 - \delta_1。$$

例如对于左旋偏振光:

$$\frac{E_y}{E_x} = e^{i\delta} = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)。$$

现在可以尝试用量子相算符来描写$e^{i\delta}$,它是

$$\sqrt{\frac{a_R g + a_L^\dagger g^*}{a_R^\dagger g^* + a_L g}} \equiv e^{i\Psi}, \quad g \equiv e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},$$

式中a_L, a_R分别是左旋、右旋偏振光子的湮灭算符。试说明操作相算符$e^{i\Psi}$可以是$e^{i\delta}$的量子对应。

第十一章

多模连续纠缠态表象

11.1 由起偏器和光分束器产生的三模连续纠缠态及其性质

前面 2.4 节已指出用分束器可以生成双模纠缠态，本节将进一步讨论怎样用分束器生成三模纠缠态。首先引入形式较为简捷且与角度 θ 相关的三模态[95]：

$$|\eta,\sigma\rangle_\theta=\exp\left[-\frac{1}{2}(|\eta|^2+|\sigma|^2)+a_3^\dagger(a_1^\dagger-\eta^*)\cos\theta\right.$$

$$\left.+a_3^\dagger(a_2^\dagger-\sigma^*)\sin\theta+\eta a_1^\dagger+\sigma a_2^\dagger\right]|0,0,0\rangle,\tag{11.1}$$

θ 的物理意义将在下面给出。$|\eta,\sigma\rangle_\theta$ 满足以下本征方程组：

$$(a_1-a_3^\dagger\cos\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta=\eta|\eta,\sigma\rangle_\theta,\tag{11.2}$$

$$(a_2-a_3^\dagger\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta=\sigma|\eta,\sigma\rangle_\theta,\tag{11.3}$$

$$(a_3-a_1^\dagger\cos\theta-a_2^\dagger\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta=-(\eta^*\cos\theta+\sigma^*\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta。\tag{11.4}$$

经过适当的组合，上述三个方程可转化为

$$(X_3-X_1\cos\theta-X_2\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta=-\sqrt{2}(\eta_1\cos\theta+\sigma_1\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta,\tag{11.5}$$

$$(P_3+P_1\cos\theta+P_2\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta=\sqrt{2}(\eta_2\cos\theta+\sigma_2\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta,\tag{11.6}$$

$$(a_2\cos\theta-a_1\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta=(\sigma\cos\theta-\eta\sin\theta)|\eta,\sigma\rangle_\theta。\tag{11.7}$$

由

$$|0,0,0\rangle\langle 0,0,0| = :\exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3): \quad (11.8)$$

可以证明 $|\eta,\sigma\rangle_\theta$ 是完备的：

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\eta d^2\sigma}{\pi^2} |\eta,\sigma\rangle_{\theta\theta}\langle\eta,\sigma| = \int \frac{d^2\eta d^2\sigma}{\pi^2} :\exp[&-|\eta|^2 - |\sigma|^2 \\ &+ \eta(a_1^\dagger - a_3\cos\theta) + \eta^*(a_1 - a_3^\dagger\cos\theta) \\ &+ \sigma^*(a_2 - a_3^\dagger\sin\theta) + \sigma(a_2^\dagger - a_3\sin\theta) \\ &+ \cos\theta(a_1^\dagger a_3^\dagger + a_1 a_3) + \sin\theta(a_2^\dagger a_3^\dagger + a_2 a_3) \\ &- a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3]: \\ = :\exp[a_3^\dagger a_3(\cos^2\theta + &\sin^2\theta - 1)]: = 1。\end{aligned} \quad (11.9)$$

引入三模相干态的完备性，可以计算内积

$$\begin{aligned}{}_{\theta'}\langle\eta',\sigma'|\eta,\sigma\rangle_\theta &= \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^2 z_i}{\pi} {}_{\theta'}\langle\eta',\sigma'|z_1,z_2,z_3\rangle\langle z_1,z_2,z_3|\eta,\sigma\rangle_\theta \\ &= \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^2 z_i}{\pi} \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{3}|z_i|^2 + z_3[(z_1-\eta')\cos\theta' \\ &\quad + (z_2-\sigma')\sin\theta'] + z_3^*[(z_1^* - \eta^*)\cos\theta \\ &\quad + (z_2^* - \sigma^*)\sin\theta] + \eta z_1^* + \sigma z_2^* + \eta'^* z_1 + \sigma'^* z_2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(|\eta|^2 + |\sigma|^2 + |\eta'|^2 + |\sigma'|^2)\Big\} \\ &= \int \frac{d^2 z_3}{\pi} \exp\Big\{-|z_3|^2[1-\cos(\theta-\theta')] \\ &\quad + z_3[(\eta-\eta')\cos\theta' + (\sigma-\sigma')\sin\theta'] \\ &\quad + z_3^*[(\eta'^* - \eta^*)\cos\theta + (\sigma'^* - \sigma^*)\sin\theta] + \eta'^*\eta \\ &\quad + \sigma'^*\sigma - \frac{1}{2}(|\eta|^2 + |\sigma|^2 + |\eta'|^2 + |\sigma'|^2)\Big\} \\ &= \frac{1}{1-\cos(\theta-\theta')} \exp\Big\{\frac{1}{1-\cos(\theta-\theta')}[(\eta-\eta')\cos\theta' \\ &\quad + (\sigma-\sigma')\sin\theta'][(\eta'^* - \eta^*)\cos\theta + (\sigma'^* - \sigma^*)\sin\theta]\end{aligned}$$

$$+\eta'^{*}\eta+\sigma'^{*}\sigma-\frac{1}{2}(|\eta|^{2}+|\sigma|^{2}+|\eta'|^{2}+|\sigma'|^{2})\Big\}。\tag{11.10}$$

特别当 $\theta=\theta'$ 时，由 δ 函数的极限表达式：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}|\alpha|^{2}\right)=\pi\delta(\alpha)\delta(\alpha^{*}),\tag{11.11}$$

(11.10)式约化为

$$\begin{aligned}{}_{\theta}\langle\eta',\sigma'|\eta,\sigma\rangle_{\theta}&=\lim_{\varepsilon\to0}\left[-\frac{1}{\varepsilon}|(\eta-\eta')\cos\theta+(\sigma-\sigma')\sin\theta|^{2}\right]\\&\quad\cdot\exp\left[\eta'^{*}\eta+\sigma'^{*}\sigma-\frac{1}{2}(|\eta|^{2}+|\sigma|^{2}\right.\\&\quad\left.+|\eta'|^{2}+|\sigma'|^{2})\right]\\&=\pi\exp\left[\frac{1}{2}\eta'^{*}(\eta-\eta')+\frac{1}{2}\eta(\eta'^{*}-\eta^{*})\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\sigma'^{*}(\sigma-\sigma')+\frac{1}{2}\sigma(\sigma'^{*}-\sigma^{*})\right]\\&\quad\cdot\delta[(\eta-\eta')\cos\theta+(\sigma-\sigma')\sin\theta]\\&\quad\cdot\delta[(\eta^{*}-\eta'^{*})\cos\theta+(\sigma^{*}-\sigma'^{*})\sin\theta]。\end{aligned}\tag{11.12}$$

这表明 $|\eta,\sigma\rangle_{\theta}$ 态是部分正交的。对于 $|\eta,\sigma\rangle_{\theta}$ 这么一个理想的三模纠缠态，用什么样的简单实验装置去实现它呢？已经知道一个理想的无损耗的透射-入射比为 50%比 50%的光分束器可以把入射到它上面的两束相互正交的极大压缩态（分别是 $a_3^{\dagger}$ 模与 $B_1^{\dagger}$ 模）纠缠为一个 Einstein-Podolsky-Rosen 理想纠缠态，记为

$$|\quad\rangle=\exp(a_3^{\dagger}B_1^{\dagger})|0,0\rangle。\tag{11.13}$$

以此态为基础，作进一步的变换，使

$$B_1^{\dagger}=a_1^{\dagger}\cos\theta+a_2^{\dagger}\sin\theta,\tag{11.14}$$

就可把(11.13)式转变为

$$\begin{aligned}|\quad\rangle&=\exp(a_3^{\dagger}B_1^{\dagger})|0,0\rangle\Rightarrow\exp[a_3^{\dagger}(a_1^{\dagger}\cos\theta+a_2^{\dagger}\sin\theta)]|0,0,0\rangle\\&=|\eta_1=0,\sigma=0\rangle_{\theta}。\end{aligned}\tag{11.15}$$

它显示了 $a_3^\dagger$ 模分别与 $a_1^\dagger, a_2^\dagger$ 模相耦合。物理上，变换(11.14)式相应于这样的现实：即将 $B_1^\dagger$ 模光射到一个极化方向与 x 轴成 θ 角的起偏器(一个起偏器只能让光的电场在某个方向通过)后分拆为两个相互正交的在极化方向上的$(a_1^\dagger, a_2^\dagger)$模，则它们与 $a_3^\dagger$ 模组成了$|\eta=0, \sigma=0\rangle_\theta$ 态，θ 就是起偏器的极化方向与水平线所夹的角。类似地，用一个光分束器也能将入射其上的 $B_1^\dagger$ 模分解为 $a_1^\dagger$ 与 $a_2^\dagger$ 模。

注意到

$$|\eta,\sigma\rangle_\theta = D_1(\eta)D_2(\sigma)\,|\,\eta=0,\sigma=0\rangle_\theta,$$

式中

$$D_1(\eta) = \exp(\eta a_1^\dagger - \eta^* a_1),$$

$$D_2(\sigma) = \exp(\sigma a_2^\dagger - \sigma^* a_2),$$

就可以借助于两束激光场(分别按振幅为$|\eta|$和$|\sigma|$，相为 $e^{i\arg\eta}$和 $e^{i\arg\sigma}$调制)和光分束器将$|\eta=0,\sigma=0\rangle_\theta$ 的光场制备到$|\eta,\sigma\rangle_\theta$ 态。

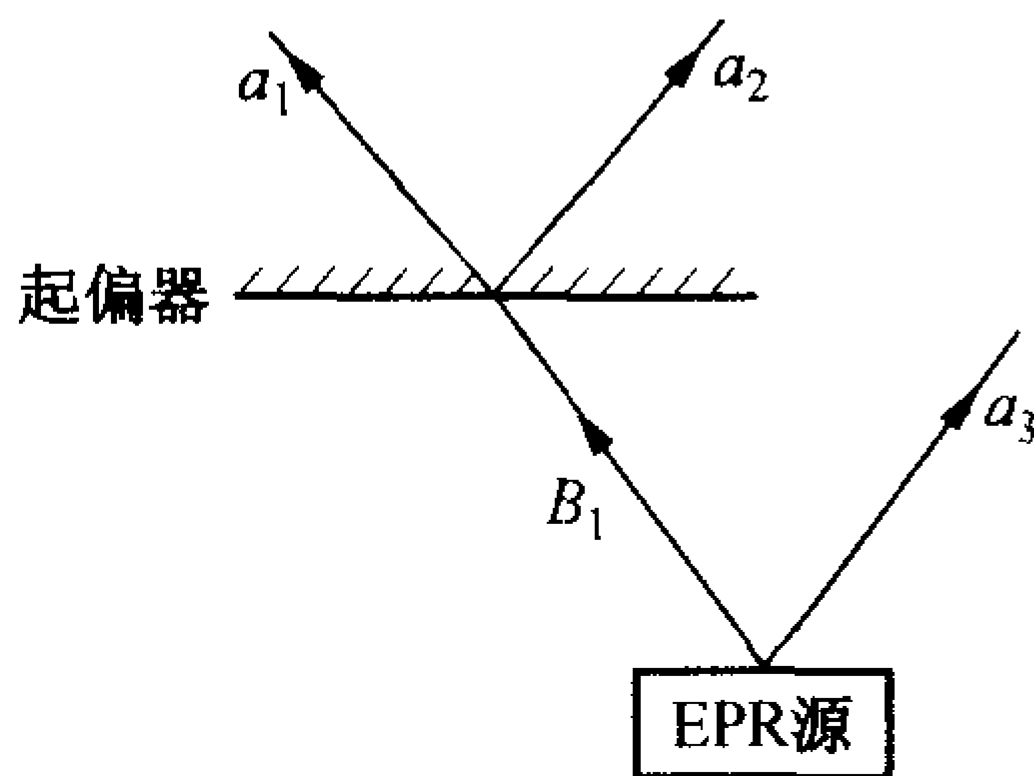


图 11-1

图 11-1 中 a_1, a_2, a_3 代表了纠缠态为$|\eta,\sigma\rangle_\theta$ 的光。

用$|\eta,\sigma\rangle_\theta$ 的完备性可以解若干动力学问题，它也可以被用作为量子隐态传输中三个人之间的量子通道。

用别的物理过程也能产生连续的三模纠缠态，它们也能组成一个量子力学的表象，详见下节。

11.2　由光分束器和参量下转换过程产生的三模连续纠缠态[96]

引入另一种三模 Fock 空间的连续纠缠态：

$$|\alpha,\gamma\rangle_\lambda=\operatorname{sech}\lambda\exp\Big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\gamma|^2)+\alpha a_1^\dagger+\gamma a_3^\dagger+a_2^\dagger(a_1^\dagger-\alpha^*)\operatorname{sech}\lambda+a_2^\dagger(a_3^\dagger-\gamma^*)\tanh\lambda\Big]|0,0,0\rangle,\tag{11.16}$$

式中 α,γ 是两个复数，λ 是实数。这个态矢量是值得关注的，因为由 IWOP 技术可证明它是完备的：

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{d}^2\gamma}{\pi^2}|\alpha,\gamma\rangle_{\lambda\,\lambda}\langle\alpha,\gamma|\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{d}^2\gamma}{\pi^2}:\exp[-|\alpha|^2-|\gamma|^2+\alpha(a_1^\dagger-a_2\operatorname{sech}\lambda)\\
&\quad+\alpha^*(a_1-a_2^\dagger\operatorname{sech}\lambda)+\gamma^*(a_3-a_2^\dagger\tanh\lambda)\\
&\quad+\gamma(a_3^\dagger-a_2\tanh\lambda)+\operatorname{sech}\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger+a_1a_2)\\
&\quad+\tanh\lambda(a_2^\dagger a_3^\dagger+a_2a_3)-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2-a_3^\dagger a_3]:\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{d}^2\gamma}{\pi^2}:\exp[(a_3^\dagger-a_2\tanh\lambda)(a_3-a_2^\dagger\tanh\lambda)\\
&\quad+(a_1^\dagger-a_2\operatorname{sech}\lambda)(a_1-a_2^\dagger\operatorname{sech}\lambda)+\operatorname{sech}\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger+a_1a_2)\\
&\quad+\tanh\lambda(a_2^\dagger a_3^\dagger+a_2a_3)-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2-a_3^\dagger a_3]:\\
&=:\exp[a_2^\dagger a_2(\tanh^2\lambda+\operatorname{sech}^2\lambda-1)]:=1。\end{aligned}\tag{11.17}$$

因此，此态可以形成一个新的量子力学纠缠态表象。那么，如何用物理仪器来实现它呢？如 2.4 节中所述，用一个光分束器制备好一个理想双模纠缠态 $\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger)|0,0\rangle_{12}$，再把模 $a_2^\dagger$ 代表的光束射入一个参量放大器的一个端口，另一输入端为真空模 $|0\rangle_3$，则态 $\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger)|0,0\rangle_{12}$ 与 $|0\rangle_3$ 就经历以下变换：

$$S_{23}\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger)|0,0,0\rangle=\exp[a_1^\dagger(a_2^\dagger\cosh\lambda-a_3\sinh\lambda)]S_{23}|0,0,0\rangle$$

$$= \operatorname{sech}\lambda \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger \cosh\lambda - a_1^\dagger a_3 \sinh\lambda)\exp(a_3^\dagger a_2^\dagger \tanh\lambda)\,|\,0,0,0\rangle$$

$$= \operatorname{sech}\lambda \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger \operatorname{sech}\lambda + a_3^\dagger a_2^\dagger \tanh\lambda)\,|\,0,0,0\rangle。 \tag{11.18}$$

再用以下平移算符作用之，得

$$D_1(\alpha)D_3(\gamma)S_{23}\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger)\,|\,0,0,0\rangle = |\,\alpha,\gamma\rangle_\lambda。 \tag{11.19}$$

读者请注意(11.1)式与(11.16)式的区别。

11.3 四模纠缠态表象[97]、[98]

作为(11.1)式的推广，以下构建四模纠缠态：

$$\begin{aligned}|\,\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi} = \exp\Big[&-\frac{1}{2}(|\,\eta\,|^2+|\,\sigma\,|^2+|\,\tau\,|^2)+(a_3^\dagger-\tau^*)\\ &\cdot(a_1^\dagger-\eta^*)\cos\theta\cos\varphi+(a_3^\dagger-\tau^*)(a_2^\dagger-\sigma^*)\\ &\cdot\sin\theta\cos\varphi+(a_1^\dagger-\eta^*)a_4^\dagger\cos\theta\sin\varphi\\ &+a_4^\dagger(a_2^\dagger-\sigma^*)\sin\theta\sin\varphi+\eta a_1^\dagger+\sigma a_2^\dagger+\tau a_3^\dagger\Big]\,|\,0,0,0,0\rangle。\end{aligned} \tag{11.20}$$

为了了解此态的性质，把 $a_i(i=1,2,3,4)$ 作用于它，得

$$\begin{pmatrix} a_1-\eta \\ a_2-\sigma \\ a_3-\tau \\ a_4 \end{pmatrix}|\,\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ \widetilde{M} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a_1-\eta)^\dagger \\ (a_2-\sigma)^\dagger \\ (a_3-\tau)^\dagger \\ a_4^\dagger \end{pmatrix}|\,\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}, \tag{11.21}$$

式中

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}。 \tag{11.22}$$

引入正交矩阵

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$D\widetilde{D}=\widetilde{D}D=I, \tag{11.23}$$

可实现以下的对角化

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ \widetilde{M} & 0 \end{pmatrix}=\widetilde{D}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}D。 \tag{11.24}$$

于是可把(11.21)式改写为

$$D\begin{pmatrix} a_1-\eta \\ a_2-\sigma \\ a_3-\tau \\ a_4 \end{pmatrix}|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}D\begin{pmatrix} a_1^\dagger-\eta^* \\ a_2^\dagger-\sigma^* \\ a_3^\dagger-\tau^* \\ a_4^\dagger \end{pmatrix}|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}。 \tag{11.25}$$

把(11.25)式写开，并注意到 $X_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_i+a_i^\dagger)$，$P_i=\frac{a_i-a_i^\dagger}{\sqrt{2}i}$，可看出 $|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}$ 满足以下本征方程组：

$$\begin{aligned} &(a_3\sin\varphi-a_4\cos\varphi)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}=\tau\sin\varphi|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}, \\ &(a_1\sin\theta-a_2\cos\theta)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}=(\eta\sin\theta-\sigma\cos\theta)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}, \\ &(X_1\cos\theta+X_2\sin\theta-X_3\cos\varphi-X_4\sin\varphi)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi} \\ &=\sqrt{2}(\eta_1\cos\theta+\sigma_1\sin\theta-\tau_1\cos\varphi)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}, \\ &(P_1\cos\theta+P_2\sin\theta+P_3\cos\varphi+P_4\sin\varphi)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi} \\ &=\sqrt{2}(\eta_2\cos\theta+\sigma_2\sin\theta+\tau_2\cos\varphi)|\eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}。 \end{aligned} \tag{11.26}$$

可以用 IWOP 技术证明

$$\int \frac{d^2\eta d^2\sigma d^2\tau}{\pi^3}\sin^2\varphi \mid \eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi\ \theta,\varphi}\langle \eta,\sigma,\tau\mid = 1。\quad (11.27)$$

物理上能实现这种四模纠缠态的办法如图 11-2 所示，图中有一个光分束器和两个起偏器，起偏方向与水平线夹的角分别是 θ 和 φ。两个起偏器的输出端的四个光场模是纠缠的。

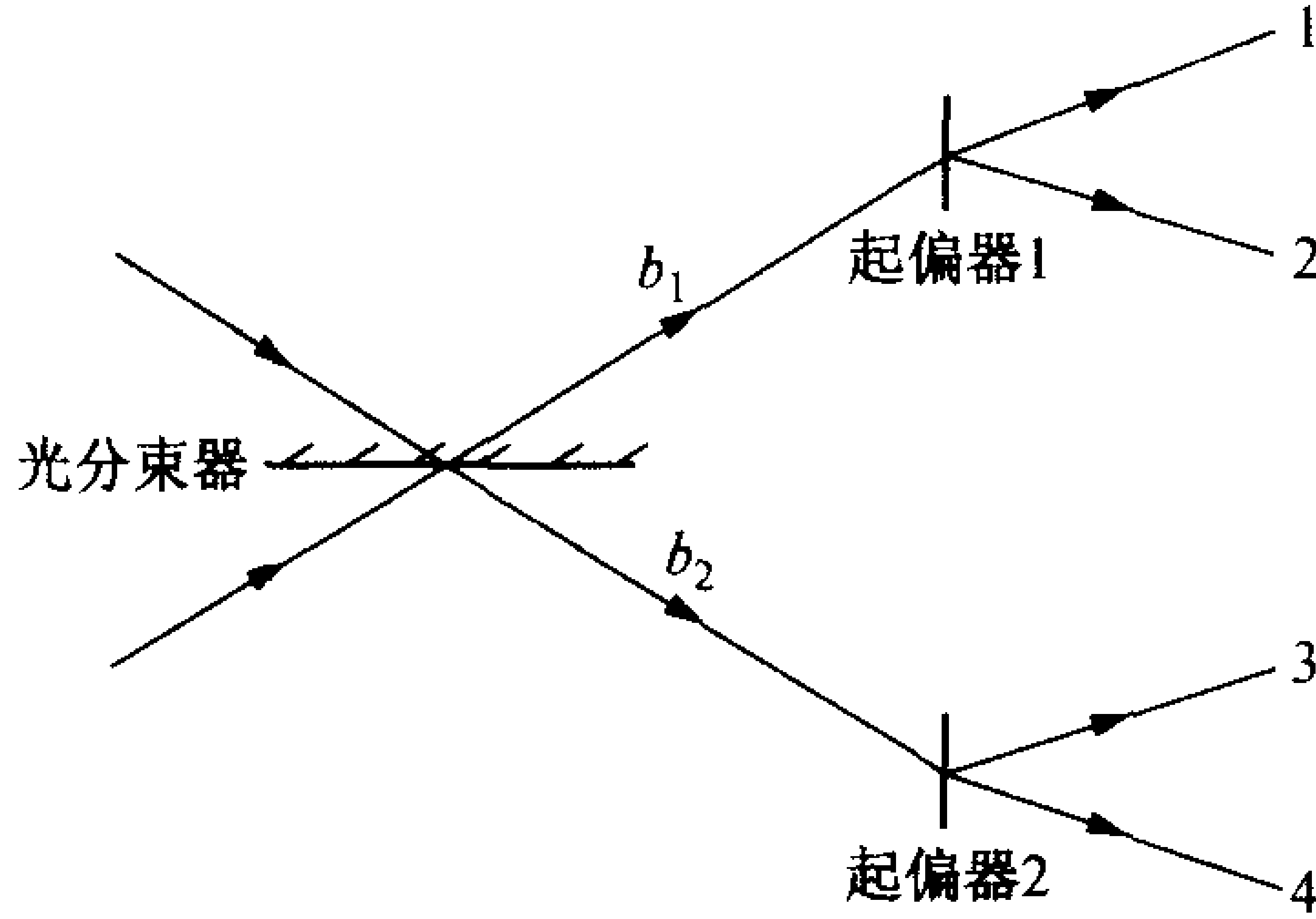


图 11-2

设已制备好了双模纠缠态 $\exp(b_1^\dagger b_2^\dagger)|0,0\rangle$，起偏器的功能使

$$b_1^\dagger \to a_1^\dagger\cos\theta + a_2^\dagger\sin\theta = R_{12}(\theta)a_1^\dagger R_{12}^{-1}(\theta),$$

$$b_2^\dagger \to a_3^\dagger\cos\varphi + a_4^\dagger\sin\varphi = R_{34}(\varphi)a_3^\dagger R_{34}^{-1}(\varphi)。$$

于是有

$$\begin{aligned}\exp(b_1^\dagger b_2^\dagger)\mid 0,0\rangle &\to R_{34}(\varphi)R_{12}(\theta)\exp(a_3^\dagger a_1^\dagger)\mid 0,0,0,0\rangle \\ &= \exp[(a_3^\dagger\cos\varphi + a_4^\dagger\sin\varphi)(a_1^\dagger\cos\theta + a_2^\dagger\sin\theta)] \\ &\quad \cdot\mid 0,0,0,0\rangle。\end{aligned}\quad (11.28)$$

再用平移算符作用之，得四模纠缠态：

$$D_1(\eta)D_2(\sigma)D_3(\tau)R_{34}(\varphi)R_{12}(\theta)\exp(a_3^\dagger a_1^\dagger)\mid 0,0,0,0\rangle = \mid \eta,\sigma,\tau\rangle_{\theta,\varphi}。\quad (11.29)$$

11.4　三模诱导纠缠态[99]

如同从 EPR 态可以导出与荷相关的纠缠态，从三模纠缠态

$|\eta,\sigma\rangle_\theta$也能导出一类与荷相关的纠缠态。令 $\eta=|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$\sigma=|\sigma|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，由(11.1)和(11.2)式可以求出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}|\eta,\sigma\rangle_\theta&=\mathrm{i}|\eta|(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}a_3^\dagger\cos\theta+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a_1^\dagger)|\eta,\sigma\rangle_\theta\\&=\mathrm{i}(a_3^\dagger\eta^*\cos\theta+a_1^\dagger\eta)|\eta,\sigma\rangle_\theta,\\\frac{\partial}{\partial\beta}|\eta,\sigma\rangle_\theta&=\mathrm{i}|\sigma|(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}a_3^\dagger\sin\theta+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}a_2^\dagger)|\eta,\sigma\rangle_\theta\\&=\mathrm{i}(a_3^\dagger\sigma^*\sin\theta+a_2^\dagger\sigma)|\eta,\sigma\rangle_\theta。\end{aligned}\tag{11.30}$$

于是有

$$\begin{aligned}&(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2-a_3^\dagger a_3)|\eta,\sigma\rangle_\theta\\&=[a_1^\dagger\eta+a_2^\dagger\sigma+a_3^\dagger(\eta^*\cos\theta+\sigma^*\sin\theta)]|\eta,\sigma\rangle_\theta\\&=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)|\eta,\sigma\rangle_\theta。\end{aligned}\tag{11.31}$$

$D\equiv(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2-a_3^\dagger a_3)$的出现提出这样的问题：当光子由光腔中两个能级自发地辐射出来而被第三人能级吸收，相应于这个过程如何建立一个本征态集合？注意到与 $a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2-a_3^\dagger a_3$ 对易的还有算符：

$$K\equiv(a_1^\dagger\cos\theta+a_2^\dagger\sin\theta-a_3)(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta-a_3^\dagger),\tag{11.32}$$

$$R\equiv(-a_1^\dagger\sin\theta+a_2^\dagger\cos\theta)(-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta),\tag{11.33}$$

$$[K,R]=0。$$

设$|q,k;n\rangle_\theta$ 是 D,K 与 R 的共同本征态：

$$\begin{aligned}K|q,k;n\rangle_\theta&=k|q,k;n\rangle_\theta,\\R|q,k;n\rangle_\theta&=n|q,k;n\rangle_\theta,\\D|q,k;n\rangle_\theta&=(q+n)|q,k;n\rangle_\theta。\end{aligned}\tag{11.34}$$

为了求$|q,k;n\rangle_\theta$，令

$$\begin{aligned}A&\equiv a_1\cos\theta+a_2\sin\theta,\\B&\equiv a_3,\\C&\equiv-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta,\end{aligned}\tag{11.35}$$

接着有

$$D \equiv a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3 = A^\dagger A + C^\dagger C - B^\dagger B, \tag{11.36}$$

$$K = (A^\dagger - B)(A - B^\dagger), \tag{11.37}$$

而本征方程组(11.34)变为

$$\begin{aligned} &(A^\dagger A + C^\dagger C - B^\dagger B) \mid q,k;n\rangle_\theta = (q+n) \mid q,k;n\rangle_\theta, \\ &C^\dagger C \mid q,k;n\rangle_\theta = n \mid q,k;n\rangle\theta, \\ &(A^\dagger - B)(A - B^\dagger) \mid q,k;n\rangle_\theta = k \mid q,k;n\rangle_\theta。\end{aligned} \tag{11.38}$$

从后面两个方程看，

$$\mid q,k;n\rangle_\theta = \mid q,k\rangle_{A,B} \otimes \mid n\rangle_C, \tag{11.39}$$

式中$|q,k\rangle_{A,B}$是双模纠缠态的诱导纠缠态：

$$\mid q,k\rangle_{A,B} = \int \frac{d\alpha}{2\pi} \mid \eta\rangle_{A,B} e^{-iq\alpha}, \quad \eta \equiv \sqrt{k} e^{i\alpha}, \tag{11.40}$$

而

$$\mid \eta\rangle_{A,B} = \exp\left(-\frac{\mid \eta \mid^2}{2} + \eta A^\dagger - \eta^* B^\dagger + A^\dagger B^\dagger\right) \mid 0,0\rangle \tag{11.41}$$

显然是$(A^\dagger - B)(A - B^\dagger)$的本征值为$|\eta| = k$ 的本征态。由于$C^\dagger C|n\rangle_C = n|n\rangle_C$，故(11.38)式显然成立。于是看到与三模连续纠缠态$|\eta,\sigma\rangle_\theta$ 相关的态矢有$|q,k;n\rangle_\theta$，它是一种与“荷”相关的纠缠态。把(11.36)式投影到$_\theta\langle\eta,\sigma|$上，有

$$\begin{aligned} &_\theta\langle\eta,\sigma \mid (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3) \mid q,k;n\rangle_\theta \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\right) {}_\theta\langle\eta,\sigma \mid q,k;n\rangle_\theta \\ &= (q+n)_\theta\langle\eta,\sigma \mid q,k;n\rangle_\theta, \end{aligned} \tag{11.42}$$

由此解出

$$_\theta\langle\eta,\sigma \mid q,k;n\rangle_\theta = F(\mid \eta \mid, \mid \sigma \mid, k) \exp[-i(q\alpha + n\beta)], \tag{11.43}$$

式中 F 是一个待定的积分常数，但它是$|\eta|$，$|\sigma|$与 k 的函数。

联立(11.38)式和(11.42)式，可知

$$
{}_\theta\langle\eta,\sigma|(a_1^\dagger\cos\theta+a_2^\dagger\sin\theta-a_3)(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta-a_3^\dagger)|q,k;n\rangle_\theta
$$
$$
=|\eta\cos\theta+\sigma\sin\theta|^2{}_\theta\langle\eta,\sigma|q,k;n\rangle_\theta
$$
$$
=k|q,k;n\rangle_\theta。\tag{11.44}
$$

对照(11.43)式可见

$$
F(|\eta|,|\sigma|,k)=\delta(|\eta\cos\theta+\sigma\sin\theta|^2-k)。\tag{11.45}
$$

利用$|\eta,\sigma\rangle_\theta$的完备性,得

$$
|q,k;n\rangle_\theta=\int\frac{d^2\eta d^2\sigma}{\pi^2}|\eta,\sigma\rangle_{\theta\,\theta}\langle\eta,\sigma|q,k;n\rangle_\theta
$$
$$
=\int\frac{d^2\eta d^2\sigma}{\pi^2}|\eta,\sigma\rangle_\theta\delta(|\eta\cos\theta+\sigma\sin\theta|^2-k)e^{-i(q\alpha+n\beta)}。\tag{11.46}
$$

由于存在狄拉克δ函数,所以可将上式看作是一种 Radon 变换。

11.5　用 IWOP 技术求描写 N 端口线性光学网络的哈密顿量

当设计一个光学网络以满足将一个入射态$|\nu\rangle$变换为$|u(\nu)\rangle$时,需要把描写这个光学网络的哈密顿量写出来。对于事先要求的幺正变换:

$$
U:|\nu\rangle\to|u(\nu)\rangle,\tag{11.47}
$$

相应的幺正算符是

$$
U=\int d\nu|u(\nu)\rangle\langle\nu|。\tag{11.48}
$$

它作用于入射光学模就能起到控制光学信息、数据传输和量子计算的作用[100]。例如一个 2N 端口的光学网络,其输入端口有 N 个模的光被转换到另外 N 个输出端口。设转移矩阵是 $M(t)$, $\widetilde{M}=M$。为了求相应的哈密顿量,在 N 模的相干态表象中构造如下的 ket-bra 型算符[101]

$$
\hat{U}_s=\int\prod_i\frac{d^2z_i}{\pi}\exp(-|z_i|^2)|M_{ij}z_j\rangle\langle z_i|,\tag{11.49}
$$

然后用 IWOP 技术积分之，得

$$\hat{U}_s=\int\prod_i\frac{d^2z_i}{\pi}:\exp\Big[\sum_i\Big(-|z_i|^2+\sum_j\hat{a}_i^{\dagger}M_{ij}z_j+z_i^*\hat{a}_i-\hat{a}_i^{\dagger}\hat{a}_i\Big)\Big]:$$

$$=:\exp\Big[\sum_{i,j}\hat{a}_i^{\dagger}(M_{ij}-\delta_{ij})\hat{a}_j\Big]:。\tag{11.50}$$

由算符公式(11.49)，可把 $\hat{U}_s$ 化为

$$\hat{U}_s=\exp\Big[\sum_{i,j}\hat{a}_i^{\dagger}(\ln M)_{ij}\hat{a}_j\Big]。\tag{11.51}$$

若要求 $\hat{U}_s$ 是幺正的，则意味着 $(\ln M)^{\dagger}=-\ln M$。令 $\ln M=\mathrm{i}tR$，有 $R^{\dagger}=R$，则(11.51)式可写作如下形式的时间演化算符：

$$\hat{U}_s(t)=\exp\Big(\mathrm{i}t\sum_{i,j}a_i^{\dagger}R_{ij}a_j\Big)。$$

根据 $\mathrm{i}\frac{\partial\hat{U}_s(t)}{\partial t}=H\hat{U}_s(t)$，可见相应的哈密顿量

$$\hat{H}_s=-\sum_{i,j}a_i^{\dagger}R_{ij}a_j。\tag{11.52}$$

例如，如果某光学网络的含时转移矩阵

$$M=I+Ef(t),\tag{11.53}$$

式中 I 是 $N\times N$ 单位矩阵，E 是全对称的：

$$E=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix},\tag{11.54}$$

并注意到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda tE}=1+\mathrm{i}\lambda tE+\frac{(\mathrm{i}\lambda t)^2}{2!}E^2+\cdots=1+\frac{E}{N}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda Nt}-1)。\tag{11.55}$$

比较(11.53)式和(11.55)式，可得到结论：

$$M=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda Et},\quad\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda Nt}-1}{N}=f(t)。\tag{11.56}$$

故一个全对称 $2N$ 端口的光学网络所相应的哈密顿量

$$H=-\lambda\sum_{i,j}a_i^{\dagger}E_{ij}a_j。\tag{11.57}$$

以下导出描写 N 端口入射光子在出射端置换的哈密顿量。当 N 模的入射光子在输出端被此光学网络重新分布为

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 & \cdots & \hat{a}_N\\ \hat{a}_{i_1} & \hat{a}_{i_2} & \hat{a}_{i_3} & \cdots & \hat{a}_{i_N}\end{bmatrix}。\tag{11.58}$$

它相应于一个置换群元素所引起的变换[102]，用相干态表象构造相应的幺正算符：

$$\hat{U}\equiv\int\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}|(z_{i_1}\quad z_{i_2}\quad z_{i_3}\cdots z_{i_N})\rangle\langle(z_1\quad z_2\quad z_3\cdots z_N)|\\ \cdot\exp(-\sum_j|z_j|^2),\tag{11.59}$$

式中

$$(z_{i_1}\quad z_{i_2}\cdots z_{i_N})=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & N\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_N\end{pmatrix}(z_1\quad z_2\cdots z_N)\equiv C_N。\tag{11.60}$$

用 IWOP 技术积分之，得到

$$\begin{aligned}\hat{U}_N&\equiv\int\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}\colon\exp\Big(-|z_1|^2-\cdots-|z_N|^2+z_{i_1}\hat{a}_1^{\dagger}+z_{i_2}\hat{a}_2^{\dagger}\\ &\quad+\cdots+z_{i_N}\hat{a}_N^{\dagger}+z_1^*\hat{a}_1+z_2^*\hat{a}_2+\cdots+z_N^*\hat{a}_N-\sum_j\hat{a}_j^{\dagger}\hat{a}_j\Big)\colon\\ &=\colon\exp(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_{i_1}+\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_{i_2}+\cdots+\hat{a}_N^{\dagger}\hat{a}_{i_N}-\sum_j\hat{a}_j^{\dagger}\hat{a}_j)\colon\\ &=\exp\left[(a_1^{\dagger}\quad a_2^{\dagger}\quad\cdots\quad a_N^{\dagger})\ln C_N\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}\right]。\end{aligned}\tag{11.61}$$

例如当 $N=2$，则

$$\hat{U}_2=\exp\left[(a_1^{\dagger}\quad a_2^{\dagger})\ln\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\right],$$

$$\ln\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}。$$

所以描述此光学器件功能的哈密顿算符

$$H_2=-\frac{\pi}{2}(a_1^{\dagger}-a_2^{\dagger})(a_1-a_2)。\tag{11.62}$$

又如要设计一个光学网络，其功能是把入射的三束光转换为

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\a_2 & a_3 & a_1\end{pmatrix}。$$

根据(11.61)式，计算

$$\ln C_3=\ln\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\ln\left[R\begin{pmatrix}1 & & \\ & \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right) & \\ & & \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right)\end{pmatrix}R^{\dagger}\right],\tag{11.63}$$

式中

$$R=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right) & \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right)\\1 & \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right) & \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right)\end{pmatrix},$$

$$R^{\dagger}C_3R=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right) & \\ & & \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right)\end{pmatrix}。$$

于是

$$\ln C_3=-\frac{4\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{3}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix},\tag{11.64}$$

相应的哈密顿量

$$\hat{H}_3 = \mathrm{i}[(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 - \hat{a}_3) - (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_3^\dagger)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1)] = \hat{H}_3^\dagger, \tag{11.65}$$

相应的幺正算符

$$\hat{U}_{C_3} = \int \prod_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi} \exp\left(-\sum_{j=1}^{3} |z_j|^2\right) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right| \cdot \int \prod_{i'=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^2 z_i'}{\pi} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} \right| \exp\left(-\sum_{j=1}^{3} |z_j'|^2\right)。 \tag{11.66}$$

它相应于两个变换$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ \hat{a}_3 & \hat{a}_2 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \\ \hat{a}_2 & \hat{a}_1 \end{pmatrix}$的总效果。对(11.66)式积分,得

$$\begin{aligned} \hat{U}_{C_3} &= \exp\left[-\frac{4\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{3}(\hat{a}_1^\dagger \quad \hat{a}_2^\dagger \quad \hat{a}_3^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_2^\dagger)(\hat{a}_3 - \hat{a}_2)\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 - \hat{a}_1)\right] \\ &= \hat{U}_{C(2\leftrightarrow 3)}\hat{U}_{C(1\leftrightarrow 2)}。 \end{aligned} \tag{11.67}$$

上式表明三个模式光子束之间的置换确实可以由两个相继的两端口光学器件来完成。

11.6　多模连续纠缠态表象[103]

如前所述,"被动的"光学器件(如光分束器、镜子、光纤、光混合器、透镜、相移器和干涉仪等),可以把一组输入态转化为另一组态,而光子关联实验可以由线性光学多端口网络来实现,多端口网络起着把入射的光子按一定的几率重新分配而出现在输出端的作

用。设一个量子系统由单光子态的线性组合表示：

$$|\psi(0)\rangle_j = \sum_i^{n-1} f_i a_i^\dagger(0)|0,0,\cdots,0\rangle, \qquad (11.68)$$

式中 f_i 是一组数。把 $|\psi(0)\rangle_j$ 传入一个线性光学器件，则出射态经历了一个幺正变换 U，其功能是

$$g_i = \sum_{j=0}^{n-1} u_{ij} f_j。 \qquad (11.69)$$

光子的几率分布守恒要求

$$\sum_{j=0}^{n-1} |g_j|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f_i|^2。 \qquad (11.70)$$

这意味着光学转移矩阵 u_{ij} 必为一个幺正群的元素，具有幺模性：

$$\sum_{j=0}^{n-1} u_{ij} u_{kj}^* = \delta_{i,k}。 \qquad (11.71)$$

相应地，光子产生算符经历以下变换：

$$U(t)a_i^\dagger(0)U^{-1}(t) = \sum_j u_{ij}(t)a_j^\dagger(0) = a_i^\dagger(t),$$

$$U(t)|\psi(0)\rangle_j = \sum_i f_i a_i^\dagger(t)|0,0,\cdots,0\rangle = |\psi(t)\rangle_j, \qquad (11.72)$$

$$U(t) = \sum_j |\psi(t)\rangle_{jj}\langle\psi(0)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}。$$

式中 H 就是描写此光学器件的哈密顿量。

以下利用 $SU(n)$ 群的性质来构造多模子纠缠态表象。在光学仪器中，有多个输入、输出端口的对称光学网络是光分束器的延伸，所以用这类仪器可以实现多模连续纠缠态。

记 $SU(n-1)$ 群的群元素为 u_{ji}，从它满足的幺正幺模性质，可见

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{ji} u_{ji}^* = \delta_{j,j} = 1。 \qquad (11.73)$$

现在用平移算符 $D_i(\zeta_i) = \exp(\zeta_i a_i^\dagger - \zeta_i^* a_i)$ 及幺正算符 U，U 满足

$$Ub^\dagger U^{-1} = \sum_{i=1}^{N-1} u_i a_i^\dagger(t), \quad \sum_{i=1}^{N-1} u_i u_i^* = 1, \qquad (11.74)$$

作用于态矢量

$$\exp(a_n^\dagger b_j^\dagger)\mid 0,0,\cdots,0\rangle_n, \tag{11.75}$$

得到 n 模的态：

$$\begin{aligned}\mid \zeta\rangle_u &= \prod_i^{n-1} D_i(\zeta_i)U\exp(a_n^\dagger b_j^\dagger)\mid 0,0,\cdots,0\rangle_n \\ &= \prod_i^{N-1} D_i(\zeta_i)\exp\left(a_n^\dagger \prod_{i=1}^{N-1} u_{ji}a_i^\dagger\right)\mid 0,0,\cdots,0\rangle_n \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\mid\zeta_i\mid^2 + a_n^\dagger\sum_{i=1}^{N-1}u_{ji}(a_i^\dagger - \zeta_i^*) + \zeta_i a_i^\dagger\right]\mid 0,0,\cdots,0\rangle_n\end{aligned} \tag{11.76}$$

就是个多模纠缠态。

用(11.76)式及 IWOP 技术，容易证明 $|\zeta\rangle_u$ 态是完备的，即

$$\begin{aligned}\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2\zeta}{\pi}\mid\zeta\rangle_{uu}\langle\zeta\mid &= :\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2\zeta}{\pi}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n-1}[-\mid\zeta_i\mid^2 + a_n^\dagger u_i(a_i^\dagger - \zeta_i^*)\right. \\ &\quad \left. + \zeta_i a_i^\dagger + a_n u_i^*(a_i - \zeta_i) + \zeta_i^* a_i - a_i^\dagger a_i] - a_n^\dagger a_n\right\}: \\ &= :\exp\left\{\sum_{i=1}^{n-1}[(a_i - a_n^\dagger u_i)(a_i^\dagger - a_n u_i^*) + a_n^\dagger u_i a_i^\dagger\right. \\ &\quad \left. + a_n u_i^* a_i - a_i^\dagger a_i] - a_n^\dagger a_n\right\}: \\ &= :\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_n^\dagger u_i a_n u_i^* - a_n^\dagger a_n\right): = 1。\end{aligned} \tag{11.77}$$

而由相干态 $\langle z_i, z_n|$ 与 $|\zeta\rangle_u$ 的内积

$$\begin{aligned}\langle z_i, z_n \mid \zeta\rangle_u &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mid z_i\mid^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[-\frac{1}{2}\mid\zeta_i\mid^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + z_n^* u_i(z_i^* - \zeta_i^*) + \zeta_i z_i^*\right]\right\}\end{aligned} \tag{11.78}$$

和

$$
{}_u\langle\zeta' \mid z_i, z_n\rangle = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\Big[-\frac{1}{2}|\zeta_i'|^2 + (z_i - \zeta_i')u_i'^* z_n + \zeta_i'^* z_i\Big]\Big\}, \tag{11.79}
$$

可求出内积

$$
\begin{aligned}
{}_{u'}\langle\zeta' \mid \zeta\rangle_u &= {}_{u'}\langle\zeta' \mid \int\prod_i^n \frac{d^2 z_i}{\pi} \mid z_i, z_n\rangle\langle z_i, z_n \mid \zeta\rangle_u \\
&= f\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2 z_i}{\pi}\int\frac{d^2 z_n}{\pi}\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}\big[z_n^* u_i(z_i^* - \zeta_i^*) + \zeta_i z_i^* + (z_i - \zeta_i') \\
&\quad \cdot u_i'^* z_n + \zeta_i'^* z_i\big]\Big\} \\
&= f\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2 z_i}{\pi}\exp\Big[-\sum_{i=1}^{n-1}|z_i|^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(z_i^* - \zeta_i^*) \\
&\quad \cdot u_i u_k'^*(z_k - \zeta_k') + \sum_{i=1}^{n-1}(\zeta_i z_i^* + \zeta_i'^* z_i)\Big] \\
&= f\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2 z_i}{\pi}\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\big[-z_i^*(\delta_{i,k} - u_i u_k'^*)z_k \\
&\quad - z_i^* u_i u_k'^* \zeta_k' - \zeta_i^* u_i u_k'^* z_k + \zeta_i^* u_i u_k'^* \zeta_k' \\
&\quad + \zeta_i \delta_{i,k} z_k^* + \zeta_i'^* \delta_{i,k} z_k\big]\Big\} \\
&= f\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2 z_i}{\pi}\exp\{[-z^*(I - v)\tilde{z} - z^* v\tilde{\zeta}' \\
&\quad - \zeta^* v\tilde{z} + \zeta^* v\tilde{\zeta}'] + (\zeta\tilde{z}^* + \zeta'^*\tilde{z})\},
\end{aligned} \tag{11.80}
$$

式中为简略书写符号计，已设

$$
\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(|\zeta_i|^2 + |\zeta_i'|^2)\Big] \equiv f, \tag{11.81}
$$

以及

$$z=(z_1\quad z_2\cdots z_{n-1}),\tag{11.82}$$

$$u_iu_k'^*=\begin{pmatrix} u_1u_1'^* & u_1u_2'^* & \cdots & u_1u_{n-1}'^* \\ u_2u_1'^* & u_2u_2'^* & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n-1}u_1'^* & u_{n-1}u_2'^* & \cdots & u_{n-1}u_{n-1}'^* \end{pmatrix}\equiv v_{i,k},\tag{11.83}$$

而 I 是一个$(n-1)\times(n-1)$单位矩阵。利用积分公式：

$$\int\prod_i^{N-1}\frac{d^2z_i}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(z\quad z^*)\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{z}^*\end{pmatrix}+(\mu\quad\nu)\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{z}^*\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[\det\begin{pmatrix}C & D\\ A & B\end{pmatrix}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}(\mu\quad\nu^*)\begin{pmatrix}C & D\\ A & B\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{\nu}^*\\ \tilde{\mu}\end{pmatrix}\right],\tag{11.84}$$

式中 B 与 C 是对称矩阵

$$(z\quad z^*)=(z_1\quad z_2\cdots z_{n-1}\quad z_1^*\quad z_2^*\cdots z_{n-1}^*)\tag{11.85}$$

及分块矩阵求逆和求行列式的公式。求得(11.80)式的积分值为

$$_{u'}\langle\zeta'\mid\zeta\rangle_u=f\int\prod_i^{n-1}\frac{d^2z_i}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(z\quad z^*)\begin{pmatrix}0 & I-\tilde{v}\\ I-v & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{z}^*\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.-(\zeta^*v-\zeta'^*\quad\zeta'\tilde{v}-\zeta)\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{z}^*\end{pmatrix}+\zeta^*v\tilde{\zeta}'\right]$$

$$=f\left[\det\begin{pmatrix}I-v & 0\\ 0 & 1-\tilde{v}\end{pmatrix}\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}(\zeta^*v-\zeta'^*\quad\zeta'\tilde{v}-\zeta)\right.$$

$$\left.\cdot\begin{pmatrix}I_n-v & 0\\ 0 & I_n-\tilde{v}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}v\tilde{\zeta}'-\tilde{\zeta}\\ \widetrm{\zeta^*v-\zeta'^*}\end{pmatrix}+\zeta^*v\zeta'\right]$$

$$=f\exp\left[(\zeta^*v-\zeta'^*)\frac{1}{I_n-v}(v\tilde{\zeta}'-\tilde{\zeta})+\zeta^*v\zeta'\right]。\tag{11.86}$$

例如，当 $n=3,\zeta=(\eta,\sigma),\zeta'=(\eta',\sigma'),u_1=\cos\theta,u_2=\sin\theta$，(11.76)式约化为

$$|\zeta\rangle_u\to|\eta,\sigma\rangle_\theta=\exp\left[-\frac{1}{2}(|\eta|^2+|\sigma|^2)+a_3^\dagger(a_1^\dagger-\eta^*)\cos\theta\right.$$

$$+a_3^{\dagger}(a_2^{\dagger}-\sigma^*)\sin\theta+\eta a_1^{\dagger}+\sigma a_2^{\dagger}\Big]\,|\,0,0,0\rangle。\quad(11.87)$$

此即(11.1)式。

11.7　三模压缩态作为一个纠缠态[104]

本节将证明算符

$$U=\exp[ir(X_1P_2+X_2P_3+X_3P_1)]$$

是一个三模压缩算符，它对于三模的正交场分量表现出标准的压缩效应。以下将用 IWOP 技术导出此压缩真空态，并讨论如何用实验装置来制备它。

由于 X_1P_2，X_2P_3 和 X_3P_1 既不相互对易，又不形成一个封闭的李代数，乍看起来是很难分解 U 中的指数算符。所以求助于 IWOP 技术，重写 U 为

$$U=\exp\left[ir(X_1\quad X_2\quad X_3)A\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix}\right]=\exp(irX_iA_{ij}P_j),$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\tag{11.88}$$

式中重复指标意味着求和惯例。

$$\begin{aligned}U^{-1}X_kU&=(e^{-r\tilde{A}})_{ki}X_i,\\U^{-1}P_kU&=(e^{rA})_{ki}P_i,\end{aligned}\tag{11.89}$$

这意味着

$$\begin{aligned}U\,|\,\boldsymbol{x}\rangle&=|\,\Lambda\,|^{\frac{1}{2}}\,|\,\Lambda\boldsymbol{x}\rangle,\\\Lambda&=e^{-r\tilde{A}},\\|\,\Lambda\,|&=\det\Lambda。\end{aligned}\tag{11.90}$$

所以 U 有以下表示：

$$U=\int d^3xU\mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x}\mid=\mid \Lambda\mid^{\frac{1}{2}}\int d^3\boldsymbol{x}\mid \Lambda\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x}\mid。\quad(11.91)$$

用 IWOP 技术和以下数学公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}d^nx\exp(-\tilde{x}Fx+\tilde{x}v)=\pi^{\frac{n}{2}}(\det F)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{4}\tilde{v}F^{-1}v\right),\quad(11.92)$$

并记 $\tilde{\boldsymbol{a}}=(a_1,a_2,a_3)$，可以导出 U 的正规乘积展开：

$$U=\pi^{-\frac{3}{2}}\mid \Lambda\mid^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}:\exp\left[-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{x}}(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)\boldsymbol{x}+\sqrt{2}\tilde{\boldsymbol{x}}(\tilde{\Lambda}\boldsymbol{a}^{\dagger}+\boldsymbol{a})-\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}+\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}\boldsymbol{a}^{\dagger})-\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right]:。$$

$$=\left[\frac{\det\Lambda}{\det\left(\frac{1+\tilde{\Lambda}\Lambda}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}:\exp\left[(\tilde{\Lambda}\boldsymbol{a}^{\dagger}+\boldsymbol{a})(1+\tilde{\Lambda}\Lambda)^{-1}(\tilde{\Lambda}\boldsymbol{a}^{\dagger}+\boldsymbol{a})-\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}\boldsymbol{a}^{\dagger}+\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a})-\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right]:。\quad(11.93)$$

令 $N=\frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}\Lambda+I)$，$U$ 变为

$$U=\mid \Lambda\mid^{\frac{1}{2}}\mid N\mid^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}(\Lambda N^{-1}\tilde{\Lambda}-I)\boldsymbol{a}^{\dagger}\right]:\exp[\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}(\Lambda N^{-1}-I)\boldsymbol{a}]:\exp\left[\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{a}}(N^{-1}-I)\boldsymbol{a}\right]。\quad(11.94)$$

注意到 $A^3=I$，I 是 3×3 单位矩阵，用矩阵论中的 Cayley-Hamilton 定理计算可知

$$\tilde{\Lambda}=\exp(-rA)=\frac{1}{3}\left[e^{-r}+2e^{\frac{r}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[e^{-r}+2e^{\frac{r}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r+\frac{2}{3}\pi\right)\right]A$$
$$=\frac{1}{3}\left[e^{-r}+2e^{\frac{r}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r+\frac{4}{3}\pi\right)\right]A^2,\quad(11.95)$$

$$N=\frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}\Lambda+I)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} f & g & g \\ g & f & g \\ g & g & f \end{pmatrix},$$

$$f=3+\mathrm{e}^{-2r}+2\mathrm{e}^{r},\tag{11.96}$$

$$g=\mathrm{e}^{-2r}-\mathrm{e}^{r}。$$

$$\begin{aligned}U=&C\exp\left\{\frac{1}{6(1+\mathrm{e}^{r})(1+\mathrm{e}^{2r})}\left[(\mathrm{e}^{r}-1)^{3}\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger 2}\right.\right.\\&\left.\left.+4(1-\mathrm{e}^{3r})\sum_{i<j}^{3}a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}\right]\right\}:\exp\frac{1}{3(1+\mathrm{e}^{r})(1+\mathrm{e}^{2r})}\\&\cdot\left\{-\left[3+\mathrm{e}^{r}+\mathrm{e}^{2r}+3\mathrm{e}^{3r}-4\mathrm{e}^{\frac{r}{2}}(1+\mathrm{e}^{2r})\cos\frac{\sqrt{3}r}{2}\right]\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger}a_i\right\}\\&+2\mathrm{e}^{\frac{r}{2}}\left[\mathrm{e}^{\frac{r}{2}}(1+\mathrm{e}^{r})+2(1+\mathrm{e}^{2r})\cos\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}+\frac{4}{3}\pi\right)\right]\\&\cdot(a_1^{\dagger}a_2+a_2^{\dagger}a_3+a_3^{\dagger}a_1)+2\mathrm{e}^{\frac{r}{2}}\left[\mathrm{e}^{\frac{r}{2}}(1+\mathrm{e}^{r})+2(1+\mathrm{e}^{2r})\right.\\&\left.\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)\right](a_1^{\dagger}a_3+a_3^{\dagger}a_2+a_2^{\dagger}a_1):\\&\cdot\exp\left\{\frac{-1}{6(1+\mathrm{e}^{r})(1+\mathrm{e}^{2r})}\left[(\mathrm{e}^{r}-1)^{3}\sum_{i=1}^{3}a_i^{2}\right.\right.\\&\left.\left.+4(1-\mathrm{e}^{3r})\sum_{i<j}^{3}a_ia_j\right]\right\},\end{aligned}\tag{11.97}$$

式中

$$C=|\Lambda|^{\frac{1}{2}}|N|^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{(1+\mathrm{e}^{r})\sqrt{\mathrm{e}^{-r}\cosh r}}。$$

把 U 作用到真空态上，得三模压缩真空态：

$$\begin{aligned}U|0,0,0\rangle=&C\exp\left\{\frac{1}{6(1+\mathrm{e}^{r})(1+\mathrm{e}^{2r})}\left[(\mathrm{e}^{r}-1)^{3}\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger 2}\right.\right.\\&\left.\left.+4(1-\mathrm{e}^{3r})\sum_{i<j}^{3}a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}\right]\right\}|0,0,0\rangle。\end{aligned}\tag{11.98}$$

特别当 $e^{r}\to 0$ 时,有

$$U\mid 0,0,0\rangle\mid_{r\to-\infty}\sim\exp\left[\frac{1}{6}\left(-\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger 2}+4\sum_{i<j}^{3}a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}\right)\right]\mid 0,0,0\rangle$$

$$\equiv\mid\quad\rangle_s。\tag{11.99}$$

引入光场的两个正交分量:

$$X_1=\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{\sqrt{6}},$$

$$X_2=\frac{P_1+P_2+P_3}{\sqrt{6}},\tag{11.100}$$

$$[X_1,X_2]=\frac{\mathrm{i}}{2}。$$

它们在三模压缩真空态的量子起伏为

$$(\Delta X_1)^2={}_s\langle\mid X_1^2\mid\rangle_s=\frac{1}{6}\langle 0,0,0\mid U^{\dagger}X_1^2U\mid 0,0,0\rangle$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{j,i}(\Lambda\widetilde{\Lambda})_{ij}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2r},$$

$$(\Delta X_2)^2={}_s\langle\mid X_2^2\mid\rangle_s=\frac{1}{12}\sum_{j,i}(\Lambda\widetilde{\Lambda})_{ij}^{-1}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2r}。\tag{11.101}$$

用什么仪器来构造三模压缩真空态呢?我们希望用一个光学网络来实现把进入到这网络的三个输入端口的三束光(其中一束用$|x=0\rangle_1$ 描述,另两束是$|p=0\rangle_2\otimes|p=0\rangle_3$,它们分别代表在 x 方向上的理想最大压缩光与在 p 方向上的理想最大压缩光)。

$$\mid x=0\rangle_1=\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}a_1^{\dagger 2}\right)\mid 0\rangle_1,$$

$$\mid p=0\rangle_i=\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(\frac{1}{2}a_i^{\dagger 2}\right)\mid 0\rangle_i。\tag{11.102}$$

这个光学网络起一个幺正算符 R 的作用,它有以下的功能:

$$R\mid x=0\rangle_1\otimes\mid p=0\rangle_2\otimes\mid p=0\rangle_3\to\mid\quad\rangle_s$$

$$=\exp\left[\frac{1}{6}\left(-\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger 2}+4\sum_{i<j}^{3}a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}\right)\right]\mid 0,0,0\rangle,\tag{11.103}$$

也就是

$$R(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}-a_3^{\dagger 2})R^{-1}=R\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}E\boldsymbol{a}^{\dagger}R^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger 2}+4\sum_{i<j}^{3}a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}\right)$$
$$=\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}B\boldsymbol{a}^{\dagger}, \qquad (11.104)$$

式中，

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$
$$B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}。 \qquad (11.105)$$

为了求出 R，设

$$R\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}R^{-1}=\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}\tilde{G},\quad Ra_iR^{-1}=G_{ij}a_j=a_i', \qquad (11.106)$$

则由以上两式可见，G 必须满足以下矩阵方程

$$\tilde{G}EG=B, \qquad (11.107)$$

其解为

$$G=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}。 \qquad (11.108)$$

相应的 R 算符可以用相干态表象及 G 矩阵构造：

$$R=\int\prod_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}\,|G_{ij}z_j\rangle\langle z_i| \qquad (11.109)$$
$$=\int\prod_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}:\exp\left[\sum_i\left(-|z_i|^2+\sum_j a_i^{\dagger}G_{ij}z_j\right)+z_i^*a_i-a_i^{\dagger}a_i\right]:$$
$$=:\exp[\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}(G-I)\boldsymbol{a}]:=\exp[\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}(\ln G)\boldsymbol{a}]。 \qquad (11.110)$$

令 $\ln G = \mathrm{i}tK, K^{\dagger} = K$，则时间演化算符是 $R(t) = \exp(\mathrm{i}t\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger} RK\boldsymbol{a})$，相应的厄米特哈密顿量是

$$H = -\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger} K\boldsymbol{a}。\tag{11.111}$$

这就是一个与三端口输入、三端口输出的光学网络所引起的变换对应的哈密顿量。

11.8　三模纠缠态表象下 Wigner 函数的边缘分布

由(11.103)式可以进一步构造三模纠缠态[105]：

$$\begin{aligned}|p,\chi_2,\chi_3\rangle = &\frac{1}{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{4}}}\exp\Big[-\frac{p^2}{6} - \frac{1}{3}(\chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_2\chi_3) \\ &+ \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p}{3}(a_1^{\dagger} + a_2^{\dagger} + a_3^{\dagger}) + \frac{\sqrt{2}\chi_2}{3}(a_1^{\dagger} - 2a_2^{\dagger} + a_3^{\dagger}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}\chi_3}{3}(a_1^{\dagger} + a_2^{\dagger} - 2a_3^{\dagger}) + \frac{2}{3}(a_1^{\dagger}a_2^{\dagger} + a_1^{\dagger}a_3^{\dagger} + a_2^{\dagger}a_3^{\dagger}) \\ &- \frac{1}{6}(a_1^{\dagger 2} + a_2^{\dagger 2} + a_3^{\dagger 2})\Big]|0,0,0\rangle.\end{aligned}\tag{11.112}$$

它满足本征方程组：

$$\begin{aligned}&(X_1 - X_2)|p,\chi_2,\chi_3\rangle = \chi_2|p,\chi_2,\chi_3\rangle, \\ &(X_1 - X_3)|p,\chi_2,\chi_3\rangle = \chi_3|p,\chi_2,\chi_3\rangle, \\ &(P_1 + P_2 + P_3)|p,\chi_2,\chi_3\rangle = p|p,\chi_2,\chi_3\rangle。\end{aligned}\tag{11.113}$$

用 IWOP 技术可以证明其完备性：

$$\begin{aligned}&\iiint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}\chi_2\mathrm{d}\chi_3\,|p,\chi_2,\chi_3\rangle\langle p,\chi_2,\chi_3| \\ =&\frac{1}{3\pi^{\frac{3}{2}}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}\chi_2\mathrm{d}\chi_3:\exp\Big[-\frac{p^2}{3} - \frac{2}{3}(\chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_2\chi_3) \\ &+ \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p}{3}(a_1^{\dagger} + a_2^{\dagger} + a_3^{\dagger} - a_1 - a_2 - a_3) \\ &+ \frac{\sqrt{2}\chi_2}{3}(a_1^{\dagger} - 2a_2^{\dagger} + a_3^{\dagger} + a_1 - 2a_2 + a_3)\end{aligned}$$

$$+\frac{\sqrt{2}\chi_3}{3}(a_1^{\dagger}+a_2^{\dagger}-2a_3^{\dagger}+a_1+a_2-2a_3)$$

$$+\frac{2}{3}\sum_{i\neq j}^{3}(a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}+a_ia_j)-\frac{1}{6}(a_i^{\dagger 2}+a_i^2+6a_i^{\dagger}a_i)\Big]:$$

$$=:\mathrm{e}^0:=1。\tag{11.114}$$

正交性是

$$\langle p,\chi_2,\chi_3\mid p',\chi_2',\chi_3'\rangle=\delta(p-p')\delta(\chi_2-\chi_2')\delta(\chi_3-\chi_3')。\tag{11.115}$$

$|p,\chi_2,\chi_3\rangle$的 Schmidt 分解是

$$\mid p,\chi_2,\chi_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}p(\chi_2+\chi_3)}{3}\Big]\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mid x\rangle_1$$

$$\otimes\mid x-\chi_2\rangle_2\otimes\mid x-\chi_3\rangle_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}xp},\tag{11.116}$$

可见它确实是个三模纠缠态。

与$|p,\chi_2,\chi_3\rangle$共轭的态是

$$\mid\chi,p_2,p_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{4}}}\exp\Big[-\frac{\chi^2}{6}-\frac{1}{3}(p_2^2+p_3^2-p_2p_3)$$

$$+\frac{\sqrt{2}\chi}{3}\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p_2}{3}(a_1^{\dagger}-2a_2^{\dagger}+a_3^{\dagger})$$

$$+\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p_3}{3}(a_1^{\dagger}+a_2^{\dagger}-2a_3^{\dagger})$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{i<j}^{3}a_i^{\dagger}a_j^{\dagger}+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}a_i^{\dagger 2}\Big]\mid 0,0,0\rangle,\tag{11.117}$$

它是 P_1-P_2,P_1-P_3 和 $X_1+X_2+X_3$ 的共同本征态：

$$\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\mid\chi,p_2,p_3\rangle=\frac{1}{3}\chi\mid\chi,p_2,p_3\rangle,$$

$$(P_1-P_2)\mid\chi,p_2,p_3\rangle=p_2\mid\chi,p_2,p_3\rangle,\tag{11.118}$$

$$(P_1-P_3)\mid\chi,p_2,p_3\rangle=p_3\mid\chi,p_2,p_3\rangle。$$

$|\chi,p_2,p_3\rangle$也是完备正交的。下面在纠缠态$|p,\chi_2,\chi_3\rangle$表象中构造三维 Wigner 算符：

$$\Delta(\rho, q_1 - q_2, q_1 - q_3; \chi, p_1 - p_2, p_1 - p_3)$$
$$= \frac{1}{\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}\chi_2\mathrm{d}\chi_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}A} \mid \rho - p, q_1 - q_2 - \chi_2, q_1 - q_3 - \chi_3\rangle$$
$$\cdot \langle \rho + p, q_1 - q_2 + \chi_2, q_1 - q_3 + \chi_3 \mid, \tag{11.119}$$

式中

$$p_1 + p_2 + p_3 \equiv \rho, \quad \chi = q_1 + q_2 + q_3,$$
$$A \equiv \frac{2}{3}[(q_1 + q_2 + q_3)p - (p_1 - 2p_2 + p_3)\chi_2 - (p_1 + p_2 - 2p_3)\chi_3]。\tag{11.120}$$

用 IWOP 技术对(11.119)式积分，得

$$\Delta(\rho, q_1 - q_2, q_1 - q_3; \chi, p_1 - p_2, p_1 - p_3)$$
$$= \frac{1}{\pi^3}\prod_{i=1}^{3} : \exp\left[-2\left(\frac{q_i - \mathrm{i}p_i}{\sqrt{2}} - a_i^\dagger\right)\left(\frac{q_i + \mathrm{i}p_i}{\sqrt{2}} - a_i\right)\right]:$$
$$= \prod_{i=1}^{3} \Delta_i(\alpha_i), \tag{11.121}$$

式中 $\alpha_i = \frac{q_i + \mathrm{i}p_i}{\sqrt{2}}$，这正好是三个单模 Wigner 算符(4.27)式之积。所以(11.121)式是三维 Wigner 算符在纠缠态表象中的正确表示。在(11.121)式中令

$$p_{12} = p_1 - p_2,\ p_{13} = p_1 - p_3,$$
$$\chi_{12} = q_1 - q_2,\ \chi_{13} = q_1 - q_3, \tag{11.122}$$

并对 Δ 作如下积分，得

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_{12}\mathrm{d}\chi_{13}\Delta(\rho, \chi_{12}, \chi_{13}; \chi, p_{12}, p_{13})$$
$$= 3^2 \mid \chi, p_2, p_3\rangle\langle \chi, p_2, p_3 \mid \Big|_{\chi\to\chi, p_2\to p_{12}, p_3\to p_{13}}。\tag{11.123}$$

这说明 Wigner 分布函数 $\langle\Psi|\Delta(\rho, \chi_{12}, \chi_{13}; \chi, p_{12}, p_{13})|\Psi\rangle$ 的一个边缘分布函数，就是正比于发现三粒子系统处于质心坐标 χ 和相对动量 p_{12} 和 p_{13} 的几率 $|\langle\chi, p_2, p_3|\Psi\rangle|^2\Big|_{\chi\to\chi, p_2\to p_{12}, p_3\to p_{13}}$。另一方

面，将 Δ 对 $\mathrm{d}q\mathrm{d}p_{12}\mathrm{d}p_{13}$ 积分，得

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}p_{12}\mathrm{d}p_{13}\Delta(p,\chi_{12},\chi_{13};q,p_{12},p_{13})$$

$$=3^2\ |p,\chi_2,\chi_3\rangle\langle p,\chi_2,\chi_3|\Big|_{p\to p,\chi_2\to\chi_{12},\chi_3\to\chi_{13}}。\quad(11.124)$$

$|\langle\Psi|p,\chi_2,\chi_3\rangle|^2$ 恰是发现三粒子系统处于总动量 p 和相对坐标 χ_{12} 和 χ_{13} 的几率。

由此可见，对于有纠缠的物理系统，态矢量的 Wigner 函数的边缘分布只是在以纠缠的方式去研究它时才有物理意义。

有关多模纠缠态和多模压缩态的文章请参见文献[106]。

第十二章

用纠缠态表象讨论量子隐态传输

12.1 分离态的隐态传输简介

在介绍用连续纠缠态表象讨论量子远程传输问题以前，先回顾一下分离态的远程传输。此方案首先是由 C. H. Bennett 和 G. Brassard等人在文献[107]中根据爱因斯坦等的量子长程关联思想提出的。文献[108]中指出，爱因斯坦曾用了一个词"telepathically"来描述两个粒子组成 EPR 对所存在的长程关联及其可能在量子信息转移中的应用。

假定一个观察者，不妨起名为 Alice，手头有一个光子或一个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，处于态$|\varphi_1\rangle$；而 Alice 本人并不清楚这个态的具体形式，他只知道

$$|\varphi_1\rangle = f|\uparrow_1\rangle + g|\downarrow_1\rangle,\ |f|^2+|g|^2=1。\quad(12.1)$$

f 与 g 对 Alice 是未知数。Alice 想把$|\phi_1\rangle$传递给远处名为 Bob 的另一观察者。为此目的，Alice 与 Bob 必须共同享有一个量子信息通道，即他们两人共享两个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子(记为粒子 2 与粒子 3)所组成的 EPR 单态(也可以是两个光子组成的极化态)：

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle)。\quad(12.2)$$

Alice 对粒子 1 与 2 作一次联合测量，该测量是以 Bell 基为依据

的，两个粒子组成的四个 Bell 基是

$$|\Psi_{12}^{(\mp)}\rangle=\sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\mp|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle), \quad (12.3)$$

$$|\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle=\sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\pm|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle)。 \quad (12.4)$$

它们张成自旋为$\frac{1}{2}$的两粒子的完备态矢集(其中一个是关于两粒子交换为反对称的，另外三个则是对称的)。结合粒子 1 与 EPR 态(12.2)式，在 Alice 未作测量前三粒子的总态矢为

$$\begin{aligned}|\Psi_{123}\rangle&=(f|\uparrow_1\rangle+g|\downarrow_1\rangle)\otimes|\Psi_{23}^{(-)}\rangle\\&=\frac{f}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle-|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle)\\&\quad+\frac{g}{\sqrt{2}}(|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle-|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle)。\end{aligned} \quad (12.5)$$

以投影算符$|\Psi_{12}^{(-)}\rangle\langle\Psi_{12}^{(-)}|$作用于$|\Psi_{123}\rangle$，得到投影系数为

$$\langle\Psi_{12}^{(-)}|\Psi_{123}\rangle=-\frac{f}{2}|\uparrow_3\rangle-\frac{g}{2}|\downarrow_3\rangle。 \quad (12.6)$$

类似地，用另外三种投影测量，相应的系数为

$$\langle\Psi_{12}^{(+)}|\Psi_{123}\rangle=-\frac{f}{2}|\uparrow_3\rangle+\frac{g}{2}|\downarrow_3\rangle, \quad (12.7)$$

$$\langle\Phi_{12}^{(+)}|\Psi_{123}\rangle=\frac{f}{2}|\downarrow_3\rangle-\frac{g}{2}|\uparrow_3\rangle, \quad (12.8)$$

$$\langle\Phi_{12}^{(-)}|\Psi_{123}\rangle=\frac{f}{2}|\downarrow_3\rangle+\frac{g}{2}|\uparrow_3\rangle。 \quad (12.9)$$

这表明$|\Psi_{123}\rangle$可以展开为

$$\begin{aligned}|\Psi_{123}\rangle=\frac{1}{2}[&-|\Psi_{12}^{(-)}\rangle(f|\uparrow_3\rangle+g|\downarrow_3\rangle)\\&+|\Psi_{12}^{(+)}\rangle(-f|\uparrow\rangle_3+g|\downarrow_3\rangle)\\&+|\Phi_{12}^{(-)}\rangle(f|\downarrow_3\rangle+g|\uparrow_3\rangle)\\&+|\Phi_{12}^{(+)}\rangle(f|\downarrow_3\rangle-g|\uparrow_3\rangle)]。\end{aligned} \quad (12.10)$$

易见这四种投影测量的结果是等几率的，各为$\frac{1}{4}$。(12.10)式也表明，测量后 Bob 的粒子 3 会立即投影到四个纯态中的一个。以一个列矢分别代表$|\downarrow\rangle$与$|\uparrow\rangle$，

$$|\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ |\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ |\varphi_1\rangle=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix},\qquad(12.11)$$

则(12.10)式中的这四个纯态分别记为

$$-\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}_3=-|\varphi_3\rangle,\quad \begin{pmatrix}-f\\g\end{pmatrix}_3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}_3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}|\varphi_3\rangle,$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}|\varphi_3\rangle,\quad \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}|\varphi_3\rangle。\qquad(12.12)$$

例如当 Alice 以$|\Psi_{12}^{(-)}\rangle\langle\Psi_{12}^{(-)}|$为测量算符时，她把此信息用经典通道告诉 Bob，Bob 就知道他的粒子处于$-|\varphi_3\rangle$，与 Alice 原有的态差一个无关紧要的相因子 $e^{i\pi}=-1$。而对于 Alice 的其他三种测量方案，Bob 只需分别作幺正变换：绕 z，x 与 y 轴转动($-\sigma_z$，σ_x，σ_y)，就可以将他手中的粒子复制为处于 Alice 原有的态矢$|\varphi_1\rangle$上，这里

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}。\qquad(12.13)$$

注意原先为 Alice 拥有的$|\phi_1\rangle$态，在经过测量后就被破坏掉了。

12.2　用纠缠态表象讨论量子隐态传输[109]、[110]

以下要讨论如何用连续的纠缠态表象更深入、详尽地研究量子通讯。例如，对于量子隐态(远程)传输(Teleportation)，用纠缠态表象可以从理论上定量地分析计算被传输的态的保真情况，也就是说，同一量子通道对于不同的输入态，其输出态的保真情况可能不同；对于量子纠缠交换，用纠缠态表象可以算出交换以后的态的具体形式，导出新的纠缠交换算符；对于量子密集编码的通讯与

接收者对密码的信号采集，可以用纠缠态表象及“相测量”(也可称为一种新的纠缠算符)手段来实现。

图 12.1 为用连续态作为量子通道实现隐态传输的示意图。

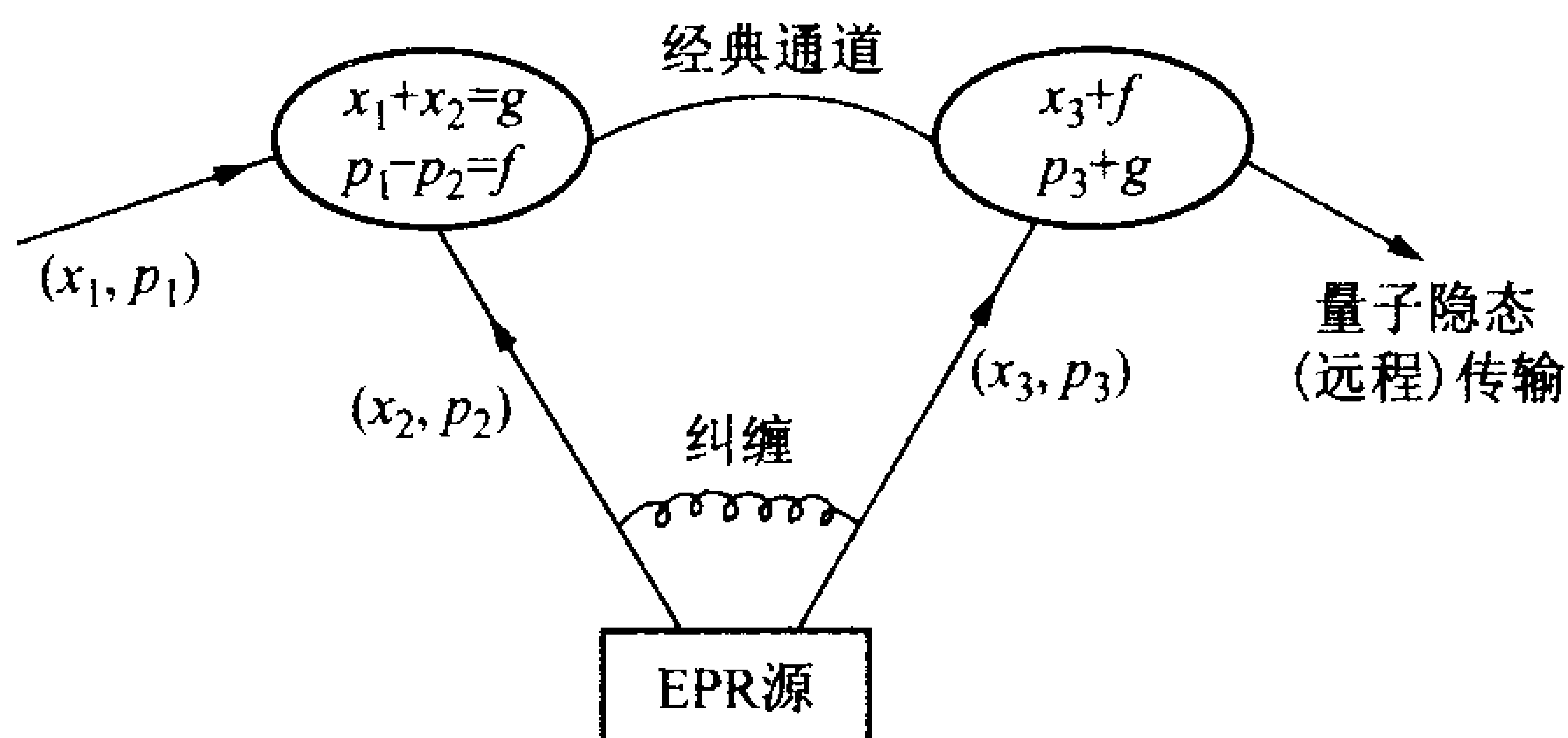


图 12.1

如前所假设，Alice 想把粒子 1 的状态(x_1，p_1)传给远处的 Bob。她与 Bob 共享一个由粒子 2 与粒子 3 组成的连续纠缠态(EPR 源)，它是(x_2+x_3，p_2-p_3)的共同本征态，设本征值为零，故有

$$x_2+x_3=0, p_2-p_3=0。\tag{12.14}$$

为了实现量子隐态(远程)传输，Alice 进行一个联合 Bell 测量，它把粒子 1 与粒子 2 投影到另一个连续纠缠态，测得值为

$$x_1+x_2=f, \quad p_1-p_2=g。\tag{12.15}$$

由于粒子 2 与 3 原先是纠缠的，这个测量导致 Bob 具有的量子态用以下值表征：

$$x_3=x_1-f, \quad p_3=p_1-g。\tag{12-16}$$

Alice 把测得的(f,g)值用经典通道(例如打电话)告知 Bob，Bob 对粒子 3 作坐标-动量平移(f,g)，则它具有的粒子态与入射态(以 x_1，p_1 表征的)相同了。

如何制备 EPR 源呢？如在第二章已经提到过的，最简单的理想实验装置是用一个 50/50 的 Beam Splitter(反射与透射成分各占 50%的光分束器)，而最简单的实现量子隐态(远程)传输的实验是用量子光场。众所周知，光场 $E(t)$ 可以写为其两个正交分量

$\hat{X}$ 与 $\hat{P}$ 的组合，

$$E(t)=E_0(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})=E_0(\hat{X}\cos\omega t+\hat{P}\sin\omega t)。\tag{12.17}$$

$\left(\cos\omega t \text{ 与 } \sin\omega t \text{ 相位差}\frac{\pi}{2}\right.$，故 $\hat{X}$ 与 $\hat{P}$ 称为正交相。$\left.\right)$因此，每个光场（每束光）可以用 $(\hat{X},\hat{P})$ 来表征。例如 $(0,\hat{P})$ 表示在 $\hat{P}$ 方向的压缩，$(\hat{X},0)$ 表示在 $\hat{X}$ 方向的压缩。把这两束光以图 12.2 所示方式输入到一个分束器上，由于分束器起了一个转动的作用，所以出射光为

$$\mathscr{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)|\,p=0\rangle_1\otimes|\,x=0\rangle_2,$$

转动算符为

$$\mathscr{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\exp\left[(a_1^{\dagger}a_2-a_2^{\dagger}a_1)\frac{\pi}{4}\right],\tag{12.18}$$

式中 $|x=0\rangle_2$ 为在 $\hat{X}$ 方向上压缩的理想光（第二个模）：

$$|\,x=0\rangle_2\sim\exp\left(-\frac{a_2^{\dagger 2}}{2}\right)|\,0\rangle_2,\tag{12.19}$$

$|p=0\rangle_1$ 为在 $\hat{P}$ 方向上的压缩态

$$|\,p=0\rangle_1\sim\exp\left(\frac{a_1^{\dagger 2}}{2}\right)|\,0\rangle_1。\tag{12.20}$$

代入(12.18)式，得

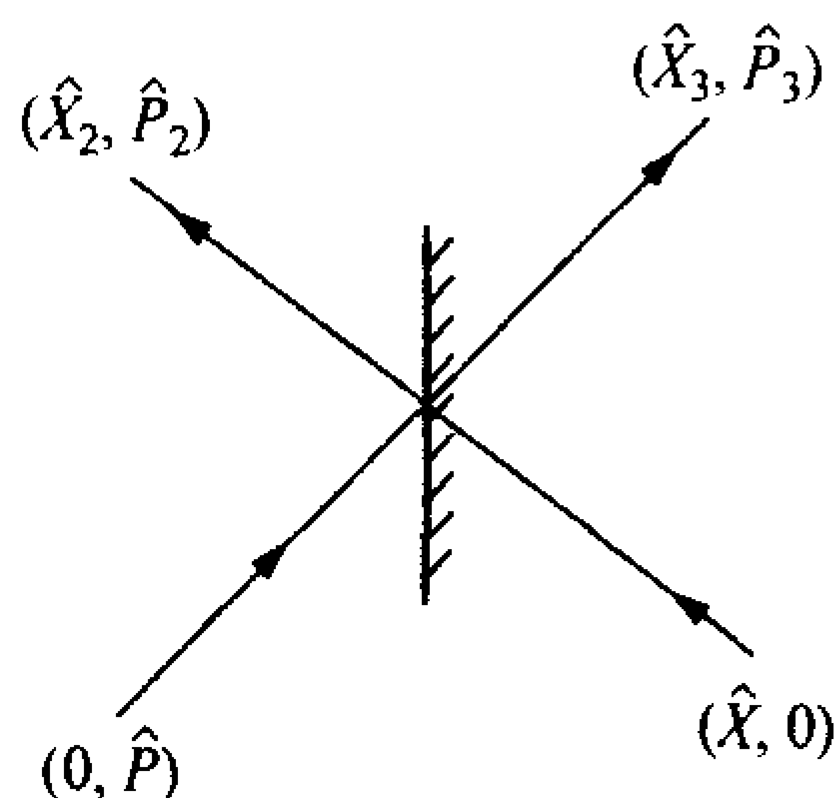


图 12.2

$$\mathscr{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)|x=0\rangle\otimes|p=0\rangle=\exp(-a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\sin 2\theta)|0,0\rangle|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$$
$$=\exp(-a_1^{\dagger}a_2^{\dagger})|0,0\rangle。\tag{12.21}$$

它就是(2.139)式的$|\zeta=0\rangle$,一个纠缠态,即出射的两束光实际上构成EPR源。可见,量子隐态传播所需量子通道——这样一个EPR态必须用纠缠态$|\eta\rangle$或$|\zeta\rangle$来描述,它们是正交完备的,有资格作为一个Bell基。又由于双模压缩算符在$|\eta\rangle$或$|\zeta\rangle$表象中有一个自然的表示,所以用纠缠态表象讨论量子隐态传输十分方便与简练,物理表述也最清晰。

当Alice要向Bob隐态传输一个连续态时,她与Bob共同享有的量子通道也应是一个连续纠缠态。以下以$|\eta\rangle$表象来设计传输方案。

让Alice与Bob共有一个$|\eta\rangle_{12}$态(即粒子1与粒子2组成一个纠缠态),Alice要把粒子3所在的态$|\psi_{in}\rangle_3$传给Bob,总的初态矢为

$$|\psi_{in}\rangle_3\otimes|\eta\rangle_{12}。\tag{12.22}$$

现在让Alice对粒子1与粒子3进行一次Bell测量,让总的态矢投影到一个由粒子2与3组成的纠缠态$|\eta'\rangle_{23}$上(因为它是完备基),利用$|\eta\rangle_{12}$与$|\eta'\rangle_{13}$的Schmidt分解(2.11)式,可得,

$$\begin{aligned}{}_{23}\langle\eta'|\psi_{in}\rangle_3\otimes|\eta\rangle_{12}=&\exp\left(\frac{i\eta_1'\eta_2'}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dp'\exp(ip'\eta_1')\\&\cdot{}_1\langle p'+\eta_2'|\otimes{}_3\langle -p'|\psi_{in}\rangle_3\\&\otimes\exp\left(-\frac{i\eta_1\eta_2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dx|x\rangle_1\\&\otimes|x-\eta_1\rangle_2\exp(ix\eta_2)。\end{aligned}\tag{12.23}$$

利用${}_i\langle x|p\rangle_i=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx}$, ${}_i\langle p|X_i=-i\frac{d}{dp_i}\langle p|$,上式变为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{i\eta_1'\eta_2'}{2}-\frac{i\eta_1\eta_2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dp'\exp(ip'\eta_1')$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ix(p' + \eta_2' - \eta_2)]_3\langle -p' \mid \psi_{in}\rangle_3 \otimes | x - \eta_1\rangle_2$$

$$= \exp\left(\frac{i\eta_1'\eta_2'}{2} - \frac{i\eta_1\eta_2}{2}\right)\exp(i\eta_1 P_2)\int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp(ip'\eta_1')$$

$$\cdot {}_3\langle -p' \mid \psi_{in}\rangle_3 \otimes |-p' - \eta_2' + \eta_2\rangle_2。\quad (12.24)$$

特别当$|\psi_{in}\rangle_3$是一个动量本征态$|p\rangle_3$，则上式变为

$${}_{13}\langle \eta' \mid \eta\rangle_{12} \mid p\rangle_3 = \exp\left(\frac{i\eta_1'\eta_2'}{2} - \frac{i\eta_1\eta_2}{2}\right)\exp(i\eta_1 P_2)\exp[i(\eta_2' - \eta_2)X_2]$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp(ip'\eta_1')\,{}_3\langle -p' \mid p_{in}\rangle_3 \otimes |-p'\rangle_2$$

$$= \exp\left(\frac{i\eta_1'\eta_2'}{2} - \frac{i\eta_1\eta_2}{2}\right)\exp(i\eta_1 P_2)\exp[i(\eta_2' - \eta_2)X_1]$$

$$\cdot \exp(-ip\eta_1') \mid p\rangle_2。\quad (12.25)$$

由此可见，Bob 只需根据 Alice 所提供的测量结果，作幺正变换$\exp[i(\eta_2' - \eta_2)X_1]$，就可得$|p\rangle$的复制品，而 Alice 原有的$|p\rangle_3$不再存在。

除了用$|\eta\rangle$态在坐标-动量表象中的 Schmidt 分解来分析以上量子隐态传输理论外，还可以利用平移算符$D_1(\eta) = \exp(\eta a_1^\dagger - \eta^* a_1)|0,0\rangle$的性质来讨论。注意到

$$|\eta\rangle = D_1(\eta)\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger) \mid 0,0\rangle, \quad (12.26)$$

就可重写(12.23)式为

$$|\psi_{out}\rangle_2 \equiv {}_{13}\langle \eta' \mid \eta\rangle_{12} \mid \psi_{in}\rangle_3 = {}_{13}\langle 0,0 \mid \exp(a_3 a_1) D_1^\dagger(\eta') D_1(\eta)$$

$$\cdot \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger) \mid 0,0\rangle_{12} \mid \psi_{in}\rangle_3$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}(-\eta'\eta^* + \eta'^*\eta)\right]\sum_{n,m=0}^{\infty} {}_{13}\langle m,m \mid D_1(\eta - \eta')$$

$$\cdot | n,n\rangle_{12} \mid \psi_{in}\rangle_3。\quad (12.27)$$

利用性质：

$$D_1(\eta) a_1^\dagger D_1^{-1}(\eta) = a_1^\dagger - \eta^*,$$

$$D_1^\dagger(\eta') D_1(\eta) = D_1(-\eta') D_1(\eta) = D_1(\eta - \eta')$$

$$\cdot \exp\left[\frac{1}{2}(\eta'^{*}\eta-\eta'\eta^{*})\right] \tag{12.28}$$

和算符恒等式

$$a_1^m D_1(\eta) a_1^{\dagger n} = \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\eta^{m-l}$$
$$\cdot :\sum_{k=0}^{\min(l,n)}\frac{l!n!(a_1^{\dagger}-\eta^{*})^{n-k}a_1^{l-k}}{k!(l-k)!(n-k)!}D_1(\eta):, \tag{12.29}$$

可算出平移算符的粒子态矩阵元：

$${}_1\langle m|D_1(\eta-\eta')|n\rangle_1 = \sqrt{\frac{n!}{m!}}(\eta-\eta')^{m-n}\exp\left(-\frac{|\eta-\eta'|^2}{2}\right)$$
$$\cdot \mathrm{L}_n^{(m-n)}(|\eta-\eta'|^2), \tag{12.30}$$

式中

$$\mathrm{L}_n^{(\rho)}(x) = \sum_{l=0}^{n}\binom{n+\rho}{n-l}\frac{1}{l!}(-x)^l$$

是拉盖尔多项式。代入(10.27)式，得

$$|\psi_{\text{out}}\rangle_2 = \exp\left[\eta'^{*}\eta-\frac{1}{2}(|\eta|^2+|\eta'|^2)\right]$$
$$\cdot \sum_{n,m}\sqrt{\frac{n!}{m!}}(\eta-\eta')^{m-n}\mathrm{L}_n^{(m-n)}(|\eta-\eta'|^2)$$
$$\cdot {}_3\langle m|\psi_{\text{in}}\rangle_3 |n\rangle_2。 \tag{12.31}$$

特别当$|\psi_{\text{in}}\rangle_3=|l\rangle_3$是粒子态，则上式变为

$$|\psi_{\text{out}}\rangle_2 = \exp\left[\eta'^{*}\eta-\frac{1}{2}(|\eta|^2+|\eta'|^2)\right]$$
$$\cdot \sqrt{\frac{1}{l!}}\sum_{n=0}^{\infty}(\eta-\eta')^{l-n}\mathrm{L}_n^{(l-n)}(|\eta-\eta'|^2)a_2^{\dagger n}|0\rangle_2$$
$$= \exp\left[\eta'^{*}\eta-\frac{1}{2}(|\eta|^2+|\eta'|^2)\right]\sqrt{\frac{1}{l!}}(\eta-\eta'+a_2^{\dagger})^l$$
$$\cdot \exp[-a_2^{\dagger}(\eta^{*}-\eta'^{*})]|0\rangle_2$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}(-\eta'\eta^* + \eta'^*\eta)\right]\sqrt{\frac{1}{l!}}D_2(\eta'^* - \eta^*)a_2^{\dagger l}\mid 0\rangle_2, \tag{12.32}$$

式中用到了拉盖尔多项式的母函数公式：

$$(1+\beta)^m e^{-\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_n^{(m-n)}(x)\beta^n, \tag{12.33}$$

$\exp\left[\frac{1}{2}(-\eta'\eta^* + \eta'^*\eta)\right]$是一个相因子。(12.32)式说明 Alice 在对$(X_1 - X_3, P_1 + P_3)$进行测量后，把测得的结果η'用经典通道通知 Bob，后者作幺正变换 $D_2^{-1}(\eta'^* - \eta^*)$，就得到了$|l\rangle_2$ 态。又当$|\psi_{\text{in}}\rangle_3 = |z\rangle_3$是一个相干态，则从(12.32)式得到

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}\rangle_2 &= \exp\left[\frac{1}{2}(-\eta'\eta^* + \eta'^*\eta)\right]\sum_l \frac{z^l}{l!}D_2(\eta'^* - \eta^*)a_2^{\dagger l}\mid 0\rangle_2 \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(-\eta'\eta^* + \eta'^*\eta)\right]D_2(\eta'^* - \eta^*)\mid z\rangle_2。\end{aligned} \tag{12.34}$$

从(12.34)式又知 Bob 在作了平移变换 $D_2^{-1}(\eta'^* - \eta^*)$以后，就可以得到$|z\rangle_2$ 态，其保真度为 1。

12.3　用双模压缩态做量子通道的隐态传输方案[111]

由于双模压缩算符实际上是压缩纠缠态$|\eta\rangle$为$\left|\frac{\eta}{\tau}\right\rangle$，所以也可以用纠缠态$|\eta\rangle$的性质来讨论把双模压缩态作为 Bob 与 Alice 共享的一个量子通道的隐态传输方案的理论。设 Bob 与 Alice 共享双模压缩态$|\tau\rangle_{13} = S_{13}(\tau)|0,0\rangle_{13}$，Bob 手中有未知态$|\psi\rangle_2$ 并想将它传给 Alice。对初始态，

$$|\psi\rangle_2 \otimes |\tau\rangle_{13} = |\psi\rangle_2 \otimes S_{13}(\tau)\mid 0,0\rangle_{13}。 \tag{12.35}$$

Bob 对粒子 2 和 3 进行一次联合测量，测量算符是$|\sigma\rangle_{23\,23}\langle\sigma|$，这里$|\sigma\rangle_{23} = S_{23}^{\dagger}(\sigma)|0,0\rangle_{23}$是又一个压缩态。那么，测量后粒子 1 的

态是

$$_{23}\langle\sigma|\psi\rangle_2\otimes|\tau\rangle_{13}={}_{23}\langle 0,0|S_{23}(\sigma)|\psi\rangle_2\otimes S_{13}(\tau)|0,0\rangle_{13}。\tag{12.36}$$

利用双模压缩算符的纠缠态表象并插入相干态的完备性，有

$$S_{13}(\tau)=\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d^2\eta}{\pi}\int\frac{d^2z}{\pi}\left|\frac{\eta}{\varepsilon}\right\rangle_{13}\otimes|z\rangle_2\,{}_{13}\langle\eta|\otimes{}_2\langle z|,$$

$$S_{23}(\sigma)=\frac{1}{\nu}\int\frac{d^2\eta'}{\pi}\int\frac{d^2z'}{\pi}\left|\frac{\eta'}{\nu}\right\rangle_{23}\otimes|z'\rangle_1\,{}_{23}\langle\eta'|\otimes{}_1\langle z'|,。\tag{12.37}$$

式中 $\varepsilon=e^{\tau},\nu=e^{\sigma}$。它们的乘积 $S_{23}(\sigma)S_{13}(\tau)$中有以下的因子：

$$\begin{aligned}&{}_1\langle z'|\otimes{}_{23}\langle\eta'|z\rangle_2\otimes\left|\frac{\eta}{\varepsilon}\right\rangle_{13}\\&=\exp\left[-\frac{1}{2}\left(|z|^2+|z'|^2+|\eta'|^2+\left|\frac{\eta}{\varepsilon}\right|^2\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{\varepsilon}(z\eta-z'^*\eta^*-\eta\eta')+z(\eta'^*+z'^*)-\eta'z'^*\right]\\&\equiv Y。\end{aligned}\tag{12.38}$$

所以，

$$S_{23}(\sigma)S_{13}(\tau)=\frac{1}{\varepsilon\nu}\int\frac{d^2\eta'}{\pi}\int\frac{d^2z'}{\pi}|z'\rangle_1\otimes\left|\frac{\eta'}{\nu}\right\rangle_{23}\,{}_{13}\langle\eta|\otimes{}_2\langle z|Y。\tag{12.39}$$

用 IWOP 技术积分，得

$$\begin{aligned}S_{23}(\sigma)S_{13}(\tau)=&\frac{1}{\cosh\sigma\cosh\tau}\exp(a_2^\dagger a_3^\dagger\tanh\sigma+a_1^\dagger a_3^\dagger\operatorname{sech}\sigma\tanh\tau)\\&\cdot:\exp[a_1^\dagger a_1(\operatorname{sech}\tau-1)+a_2^\dagger a_2(\operatorname{sech}\sigma-1)\\&+a_3^\dagger a_3(\operatorname{sech}\tau\operatorname{sech}\sigma-1)-a_1^\dagger a_2\tanh\sigma\tanh\tau]:\\&\cdot\exp(-a_1a_3\tanh\tau-a_2a_3\operatorname{sech}\tau\tanh\sigma)。\end{aligned}\tag{12.40}$$

把(12.40)式代入(12.36)式，并让$|\psi\rangle_2$ 是个相干态（也可以是别的态），$|\psi\rangle_2=\exp(za_2^\dagger)|0\rangle_2$，那么 Alice 就得到如下的态：

$${}_{23}\langle 0,0|S_{23}(\sigma)|z\rangle_2\otimes S_{13}(\tau)|0,0\rangle_{13}$$

$$=\frac{1}{\cosh\sigma\cosh\tau}\exp(-a_1^\dagger z\tanh\sigma\tanh\tau)\mid 0\rangle_1。\quad (12.41)$$

在高压缩极限下，$\mu\to\infty$，$\nu\to-\infty$，上式趋于 $\exp(za_1^\dagger)|0\rangle_1$，于是初始相干态被传到了粒子 1。可见借助于纠缠态表象，可以使量子隐态传输的讨论简练化。

现进一步把(12.39)式推广到以下物理过程的计算：Alice 和 Bob 共享一个双模压缩态 $S_{12}(\nu)|0,0\rangle_{12}$，它可以由一个参量放大器生成。其中的模 2 与待传送的量子态(3 模)$|\psi_{in}\rangle_3$ 作为另一个参量放大器的输入态，压缩的效果用 $S_{23}^\dagger(\mu)$表示。Alice 然后在输出端测量模 2 的光子数 m 与模 3 的光子数 n，而 Bob 手中的模 1 态为

$$\begin{aligned}
&{}_{23}\langle m,n\mid S_{23}^\dagger(\mu)S_{12}(\nu)\mid 0,0\rangle_{12}\mid\psi_{in}\rangle_3\\
&={}_{23}\langle 0,0\mid\sqrt{m!n!}\sum_{j=\max(0,n-m)}^{n}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{j!(n-j)!(m-n+j)!}\\
&\quad\cdot(\mathrm{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}a_2^{m-n+j}a_3^j\,\mathrm{sech}\sigma\exp(a_2a_3\tanh\lambda)\\
&\quad\cdot\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger\tanh\sigma)\mid 0,0\rangle_{12}\mid\psi_{in}\rangle_3\\
&={}_{13}\langle 0,0\mid\sqrt{m!n!}\sum_{j=\max(0,n-m)}^{n}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{j!(n-j)!(m-n+j)!}\\
&\quad\cdot(\mathrm{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}a_3^ja_2^{m-n+j}\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger\tanh\sigma)\\
&\quad\cdot\exp(a_3a_1^\dagger\tanh\lambda\tanh\sigma)\mid 0,0\rangle_{12}\mid\psi_{in}\rangle_3\\
&=\sum_{j=\max(0,n-m)}^{n}{}_3\langle j\mid\sqrt{m!n!}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{(n-j)!\sqrt{j!(m-n+j)!}}\\
&\quad\cdot(\mathrm{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}(\tanh\sigma)^{m-n+j}\exp(a_3a_1^\dagger\tanh\lambda\tanh\sigma)\\
&\quad\cdot\mid m-n+j\rangle_1\mid\psi_{in}\rangle_3\\
&\equiv\mid\varphi\rangle_1,
\end{aligned}\quad (12.42)$$

式中 $\mu=e^\lambda$，$\nu=e^\sigma$。上式中已经用到了第二章 2.6 节中 $S|m,n\rangle$的表达式。在(12.42)式中当$|\psi_{in}\rangle_3$ 是相干态$|z\rangle_3$，则$|\varphi\rangle_1$ 变为

$$\mid\varphi\rangle_1=\sum_{j=\max(0,n-m)}^{n}\sqrt{m!n!}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{(n-j)!j!\sqrt{(m-n+j)!}}$$

$$\cdot (\operatorname{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}(\tanh\sigma)^{m-n+j}$$

$$\cdot z^j \exp(z a_1^\dagger \tanh\lambda \tanh\sigma) \mid m-n+j\rangle_1。\quad (12.43)$$

可见，仅当 $\tanh\lambda\tanh\sigma\to 1$ 和 $n-m$ 非常小时（从而 j 值也小），才能使传送相干态有较高的保真度。

又如当 $|\psi_{\text{in}}\rangle_3$ 是一个单模压缩真空态：

$$|\psi_{\text{in}}\rangle_3 = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\gamma \exp\left(-\frac{1}{2}a_2^{\dagger 2}\tanh\gamma\right)|0\rangle_3, \quad (12.44)$$

则(12.42)式变成

$$|\varphi\rangle_1 = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\gamma \sum_{j=\max(0,n-m)}^{n} {}_2\langle j \mid \sqrt{m!n!}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{(n-j)!\sqrt{j!(m-n+j)!}}$$

$$\cdot (\operatorname{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}(\tanh\sigma)^{m-n+j}\exp\left(-\frac{1}{2}a_3^{\dagger 2}\tanh\gamma\right)$$

$$\cdot \exp[(a_3 - a_3^\dagger\tanh\gamma)a_1^\dagger\tanh\lambda\tanh\sigma] \mid m-n+j\rangle_0 \mid 0\rangle_2$$

$$= \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}\gamma \sum_{j=\max(0,n-m)}^{n} \sqrt{m!n!}\frac{(-\tanh\lambda)^{n-j}}{(n-j)!\sqrt{j!(m-n+j)!}}$$

$$\cdot (\operatorname{sech}\lambda)^{m-n+2j+1}(\tanh\sigma)^{m-n+j}\hat{A}_1^j$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\tanh\gamma(a_1^\dagger\tanh\lambda\tanh\sigma)^2\right]|m-n+j\rangle_1,$$

$$(12.45)$$

式中

$$\hat{A}_1^j \equiv {}_3\langle 0 \mid a_3^j \frac{1}{\sqrt{j!}}\exp\left(-a_1^\dagger a_3^\dagger \tanh\gamma\tanh\lambda\tanh\sigma - \frac{1}{2}a_3^{\dagger 2}\tanh\gamma\right) \mid 0\rangle_3$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi\sqrt{j!}}\, {}_3\langle 0 \mid a_3^j \mid \alpha\rangle_3\, {}_3\langle\alpha \mid \exp\left(-a_1^\dagger a_3^\dagger\tanh\gamma\tanh\lambda\tanh\sigma\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}a_3^{\dagger 2}\tanh\gamma\right) \mid 0\rangle_3$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{j!}}\int d^2\alpha\,\alpha^j \exp\left(-|\alpha|^2 - a_1^\dagger\alpha^*\tanh\gamma\tanh\lambda\tanh\sigma\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\alpha^{*2}\tanh\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{j!}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\frac{j!}{k!(j-2k)!}(-a_1^{\dagger}\tanh\gamma\tanh\lambda\tanh\sigma)^{j-2k}$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{2}\tanh\gamma\right)^k, \tag{12.46}$$

式中$|\alpha_3\rangle$是相干态，$\left[\frac{j}{2}\right]$是不大于$\frac{j}{2}$的最大整数。从(12.45)式与(12.46)式可知，当$\tanh\lambda\tanh\sigma\to 1$，以及$n$和$n-m$都很小时，隐态传输的保真度才可能接近于1。

12.4 纠缠态在量子密集编码中的应用[112]

量子密集编码的意思是：可以只传递一个量子比特而带有2比特经典意义下的信息。这也需要发送者与接收者共享有一个纠缠态，发送者把2比特的经典信息编码在一个纠缠态上，而接收者设法从收到的态中摘取信息。本节将用纠缠态表象来讨论此问题。

令发送者把经典信息x与p(连续变量)载在一个双模压缩真空态上，理论上，这可以用算符$\exp(\mathrm{i}p\hat{X}_1)$与$\exp(-\mathrm{i}x\hat{P}_1)$作用于$S^{(2)}|0,0\rangle$上，$S^{(2)}$是双模压缩算符，它的纠缠态表象见(2.39)式，发送者手中的态是

$$|\psi\rangle_s=\exp(-\mathrm{i}x\hat{P}_1)\exp(\mathrm{i}p\hat{X}_1)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi\mu}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta|0,0\rangle,$$

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+\mathrm{i}\eta_2)。\tag{12.47}$$

注意$\exp(\mathrm{i}p\hat{X}_1)|0\rangle_1$与$\exp(\mathrm{i}x\hat{P}_1)|0\rangle_1$实际上代表两束激光。用$|\eta\rangle$在坐标表象的Schmidt分解(2.11)式，可知

$$\exp(\mathrm{i}p\hat{X}_1)\left|\eta=\frac{\eta_1+\mathrm{i}\eta_2}{\sqrt{2}\mu}\right\rangle=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{2\mu^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\;|x\rangle_1$$

$$\otimes|x-\frac{\eta_1}{\mu}\rangle_2\exp\left(\frac{\mathrm{i}x\eta_2}{\mu}+\mathrm{i}px\right)$$
$$=\exp\left(\frac{\mathrm{i}p\eta_1}{2\mu}\right)|\frac{1}{\sqrt{2}\mu}[\eta_1+\mathrm{i}(\eta_2+\mu p)]\rangle。\tag{12.48}$$

接着用$|\eta\rangle$在动量表象的 Schmidt 分解式计算

$$\exp(\mathrm{i}x\hat{P}_2)\exp(\mathrm{i}p\hat{X}_1)|\frac{\eta}{\mu}\rangle$$
$$=\exp(-\mathrm{i}x\hat{P}_1)\exp\left(\frac{\mathrm{i}p\eta_1}{2\mu}\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\eta_1(\eta_2+\mu p)}{2\mu}\right]^2$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'|p'+\frac{\eta_2+\mu p}{\mu}\rangle_1\otimes|-p'\rangle_2\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\eta_1 p'}{\mu}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}M(\eta)}|\frac{\eta_1+\mu x+\mathrm{i}(\eta_2+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\rangle,\tag{12.49}$$

式中

$$M(\eta)=\frac{p\eta_1}{2\mu}+\frac{x(\eta_2+\mu p)}{2\mu}。\tag{12.50}$$

由于$\exp[\mathrm{i}x(\hat{P}_1+\hat{P}_2)]|\eta\rangle=\exp(\mathrm{i}x\eta_2)|\eta\rangle$，所以$\exp(-\mathrm{i}x\hat{P}_1)\cdot\exp(\mathrm{i}p\hat{X}_1)|\frac{\eta}{\mu}\rangle$与(12.50)式的结果只差一个相因子，使得$M(\eta)\to M'(\eta)$：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}M'(\eta)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}M(\eta)}\exp\left[\frac{\mathrm{i}x(\eta_2+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\right]。\tag{12.51}$$

因此，

$$|\psi\rangle_s=\mu^{-1}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}M'(\eta)}|\frac{\eta_1+\mu x+\mathrm{i}(\eta_2+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\rangle\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)。\tag{12.52}$$

为了从已寄出的态中提取信息，接收者可以实行联合投影测量，相应的算符是$|\eta''\rangle_{12\,12}\langle\eta''|$，用(12.52)式与(12.49)式得到

$${}_s\langle\psi|\eta''\rangle_{12\,12}\langle\eta''|\psi\rangle_s$$

$$=\mu^{-2}\int\frac{d^2\eta'}{\pi}\int\frac{d^2\eta}{\pi}e^{-iM'(\eta')}\left\langle\frac{\eta_1'+\mu x+i(\eta_2'+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\right|\eta''\rangle_{12}$$

$$\cdot{}_{12}\langle\eta''\left|\frac{\eta_1+x\mu+i(\eta_2+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\right\rangle\exp\left(-\frac{|\eta|^2+|\eta'|^2}{2}\right)e^{iM'(\eta)}$$

$$=\mu^2\exp\{-\mu^2[(\eta_1''-x)^2+(\eta_2''-p)^2]\},\tag{12.53}$$

式中 $\eta''=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1''+i\eta_2'')$。所以经过测量后，接收者就知道了$(x,p)$这对信息，实现了密集编码的程序。特别当 $\mu\to\infty,\frac{1}{\mu}\equiv\varepsilon\to0$，(12.53)式右边约化为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2}[(\eta_1''-x)^2+(\eta_2''-p)^2]\right\}\to\pi\delta(\eta_1''-x)\delta(\eta_2''-p)。\tag{12.54}$$

这表明当压缩态的压缩参数足够大时，密集编码的传递的误差很小。以上讨论表明用纠缠态表象讨论密集编码是很简捷的。另外，接收者还可以用“操作相算符”的办法来提取信息，即用算符 $\sqrt{\frac{a_1-a_2^\dagger}{a_1^\dagger-a_2}}$ 在 $|\psi\rangle_s$ 的期望值，由(10.7)式得

$$e^{i\Phi}|\eta\rangle=\sqrt{\frac{\eta}{\eta^*}}|\eta\rangle=e^{i\varphi}|\eta\rangle,\quad\eta=|\eta|e^{i\varphi},\tag{12.55}$$

且有

$${}_s\langle\psi|e^{i\Phi}|\psi\rangle_s=\mu^{-2}\int\frac{d^2\eta'}{\pi}e^{-iM(\eta')}\left\langle\frac{\eta_1'+\mu x+i(\eta_2'+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\right|$$

$$\cdot\sqrt{\frac{a_1-a_2^\dagger}{a_1^\dagger-a_2}}\int\frac{d^2\eta}{\pi}\left|\frac{\eta_1+\mu x+i(\eta_2+\mu p)}{\sqrt{2}\mu}\right\rangle$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{|\eta|^2+|\eta'|^2}{2}\right)e^{iM(\eta)}$$

$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\exp\left[i\arctan\left(\frac{\mu p+\eta_2}{\mu x+\eta_1}\right)-|\eta|^2\right]。\tag{12.56}$$

这个积分是很难得到其解析表达式的，但当信号的强度足够大，以

致于$(|\eta_1|,|\eta_2|)\langle\langle(|p|,|x|)$，可以展开

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[\mathrm{i}\arctan\left(\frac{\mu p+\eta_2}{\mu x+\eta_1}\right)\right]\\
=&\frac{1}{2}\exp\left[\mathrm{i}\arctan\left(\frac{p}{x}\right)\right]\left\{\frac{1}{\mu^2(x^2+p^2)^2}[2\mu^2(x^2+p^2)^2+2\mu(x^2+p^2)\right.\\
&\cdot(x\eta_2-p\eta_1)+\eta_1^2(2px+p^2)-2\eta_1\eta_2(x^2+xp-p^2)\\
&\left.\cdot\eta_2^2(x^2-2xp)]+o(\eta_1^4,\eta_2^4)\right\}。
\end{aligned}
\tag{12.57}
$$

把(12.57)式代入(12.56)式后，积分得到

$$
\begin{aligned}
{}_s\langle\psi\mid\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\mid\psi\rangle_s\approx&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{2\pi}\exp\left[\mathrm{i}\arctan\left(\frac{p}{x}\right)-\eta_1^2-\eta_2^2\right]\\
&\cdot\frac{1}{\mu^2(x^2+p^2)^2}[2\mu^2(x^2+p^2)^2\\
&+2\mu(x^2+p^2)(x\eta_2-p\eta_1)+\eta_1^2(2px+p^2)\\
&-2\eta_1\eta_2(x^2+xp-p^2)+\eta_2^2(x^2-2xp)]\\
=&\exp\left[\mathrm{i}\arctan\left(\frac{p}{x}\right)\right]\left[1+\frac{1}{4\mu^2(x^2+p^2)}\right]。
\end{aligned}
\tag{12.58}
$$

根据$\cos\Phi=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi})$，可以进一步算出厄米特算符$\cos\Phi$的期望值，也就是说接收者可从$\frac{p}{x}$与$(x^2+p^2)$的值中提取出经典比特$x$与$p$的信息，而且$x$与$p$是连续变量。

12.5　利用纠缠态表象实现纠缠交换

纠缠交换是产生新纠缠态的一种方法，它利用两粒子态的投影以得到一个纠缠态，这种投影测量无需要求这两个粒子发生直接相互作用。设有两对空间上分离的两体纠缠态，第一对中的两个粒子(如A,B)是纠缠对，另一对为(C,D)纠缠对，B与D从未有过瓜葛。现对A与C进行联合Bell测量，那么B与D就会组

成纠缠态，这称为纠缠交换。

用$|\eta\rangle$表象能很方便地讨论连续态的纠缠交换。对两组两体纠缠态$|\eta\rangle_{12}\otimes|\eta'\rangle_{34}$进行$(X_1-X_4, P_1+P_4)$的联合测量，则粒子1与4就要变成$(X_1-X_4, P_1+P_4)$的共同本征态$|\eta''\rangle_{14}$，该测量导致如下的塌缩：

$$
\begin{aligned}
({}_{14}\langle\eta''|)\,|\eta\rangle_{12}\,|\eta'\rangle_{34} &= {}_{14}\langle 0,0|\exp\Big(-\frac{1}{2}|\eta''|^2+\eta''^{*}a_1 \\
&\quad -\eta''a_4+a_4a_1\Big)\,|\eta\rangle_{12}\,|\eta'\rangle_{34}。
\end{aligned} \tag{12.59}
$$

利用算符恒等式(它是用IWOP技术和相干态的完备性导出的)：

$$
\begin{aligned}
&\exp(F_1a_1+F_4a_4+\tau a_4a_1)\exp(\lambda a_2^{\dagger}a_1^{\dagger}+\sigma a_3^{\dagger}a_4^{\dagger}+\sum_i G_ia_i^{\dagger}) \\
&=\exp(F_1a_1+F_4a_4+\tau a_4a_1)\int\prod_{i=1}^{4}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}|z_i\rangle\langle z_i| \\
&\quad\cdot\exp(\lambda a_2^{\dagger}a_1^{\dagger}+\sigma a_3^{\dagger}a_4^{\dagger}+\sum_i G_ia_i^{\dagger}) \\
&=\int\prod_{i=1}^{4}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}\exp(F_1z_1+F_4z_4+\tau z_4z_1+\lambda z_2^{*}z_1^{*} \\
&\quad+\sigma z_3^{*}z_4^{*}+\sum_i G_iz_i^{*}):\exp\Big[\sum_i(-|z_i|^2 \\
&\quad+z_ia_i^{\dagger}+z_i^{*}a_i-a_i^{\dagger}a_i)\Big]: \\
&=:\exp[F_1(a_1+G_1)+\sum_i G_ia_i^{\dagger}+\lambda F_1a_2^{\dagger} \\
&\quad+(\tau G_1+F_4)G_4+\tau(G_1a_4+G_4a_1)+F_4a_4 \\
&\quad+\lambda\tau G_4a_2^{\dagger}+\lambda\sigma\tau a_3^{\dagger}a_2^{\dagger}+\lambda a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}+\tau a_4a_1 \\
&\quad+\lambda\tau a_4a_2^{\dagger}+\sigma\tau a_3^{\dagger}a_1+\sigma a_3^{\dagger}a_4^{\dagger}]:,
\end{aligned} \tag{12.60}
$$

就可把(12.59)式化为

$$
({}_{14}\langle\eta''|)\,|\eta\rangle_{12}\,|\eta'\rangle_{34}=\exp\Big[-\frac{1}{2}(|\eta''|^2+|\eta|^2+|\eta'|^2)
$$

$$+\eta\eta''-\eta\eta'^{*}+\eta''^{*}\eta'^{*}\Big]\exp[a_2^{\dagger}(\eta''-\eta^{*}-\eta'^{*})$$

$$-a_3^{\dagger}(\eta''^{*}-\eta-\eta')+a_2^{\dagger}a_3^{\dagger}]\,|\,0,0\rangle_{23}。\tag{12.61}$$

与 EPR 态$|\eta\rangle$的标准形式(2.3)式相比较，可知

$$({}_{14}\langle\eta''|)\,|\,\eta\rangle_{12}\,|\,\eta'\rangle_{34}=A\,|\,\eta''-\eta^{*}-\eta'^{*}\rangle_{23},\tag{12.62}$$

式中

$$A=\exp\Big[\frac{1}{2}(\eta\eta''-\eta\eta'^{*}+\eta''^{*}\eta'^{*})$$

$$-\frac{1}{2}(\eta^{*}\eta''^{*}-\eta^{*}\eta'+\eta''\eta')\Big]。$$

从(12.62)式看到，由于纠缠交换的机制，使得原来“鸡犬之声不相闻，老死也未见往来”的两个粒子 2 与 3 之间发生了纠缠，组成了新的纠缠态，而 A 是纯虚的，它只是个相因子。

有趣的是：当经过测量或其他操作把粒子 1 和 4 制备到组成一个压缩态 $S_{14}\,|0,0\rangle_{14}$时，粒子 2 与 3 也会纠缠为一个双模压缩态。关于这一点，可以从计算投影$({}_{14}\langle 0,0|S_{14})\,|\eta\rangle_{12}\,|\eta'\rangle_{34}$看出。利用双模压缩算符的纠缠态表象和(2.5)式，得

$$({}_{14}\langle 0,0\,|\,S_{14})\,|\,\eta\rangle_{12}\,|\,\eta'\rangle_{34}$$

$$={}_{14}\langle 0,0\,|\,\exp[\nu(a_1^{\dagger}a_4^{\dagger}-a_1a_4)]\,|\,\eta\rangle_{12}\,|\,\eta'\rangle_{34}$$

$$=\frac{1}{\mu}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta''}{\pi}\,{}_{14}\langle 0,0\,|\,\frac{\eta''}{\mu}\rangle_{14}\exp\Big[-\frac{1}{2}(|\,\eta''\,|^2+|\,\eta\,|^2+|\,\eta'\,|^2)$$

$$+\eta\eta''-\eta\eta'^{*}+\eta''^{*}\eta'^{*}+a_2^{\dagger}(\eta''-\eta^{*}-\eta'^{*})$$

$$-a_3^{\dagger}(\eta''^{*}-\eta-\eta')+a_2^{\dagger}a_3^{\dagger}\Big]\,|\,0,0\rangle_{23}$$

$$=\frac{2\mu}{1+\mu^2}\exp\Big[\frac{2\mu^2}{1+\mu^2}(a_2^{\dagger}+\eta)(\eta'^{*}-a_3^{\dagger})-\frac{1}{2}(|\,\eta\,|^2+|\,\eta'\,|^2)$$

$$-\eta\eta'^{*}-a_2^{\dagger}(\eta^{*}+\eta'^{*})+a_3^{\dagger}(\eta+\eta')+a_2^{\dagger}a_3^{\dagger}\Big]\,|\,0,0\rangle_{23}$$

$$=\operatorname{sech}\nu\exp\Big[-\frac{1}{2}(|\,\eta\,|^2+|\,\eta'\,|^2)-a_2^{\dagger}(\eta^{*}-\eta'^{*}\tanh\nu)$$

$$+a_3^\dagger(\eta'-\eta\tanh\nu)+\eta\eta'^*\tanh\nu-a_2^\dagger a_3^\dagger\tanh\nu\Big]\,|\,0,0\rangle_{23},$$

(12.63)

式中 $\mu=e^\nu$。结果表明粒子 2 和 3 确实也纠缠为一个双模压缩态。

另一种理论上实现纠缠交换的方案是通过引入以下对两对纠缠态的交迭积分而发现的。考虑到

$$\begin{aligned}
\rangle|_{\gamma,\sigma}&\equiv\exp\left(\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)\int\frac{d^2\eta}{\pi}\,|\,\eta\rangle_{12}\otimes|\,\eta-\sigma\rangle_{34}\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)\\
&=\exp\left(\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)\int\frac{d^2\eta}{\pi}\exp\Big[-|\,\eta\,|^2+\eta a_1^\dagger-\eta^*a_2^\dagger+a_2^\dagger a_1^\dagger\\
&\quad+\frac{1}{2}(\eta\sigma^*+\eta^*\sigma)+(\eta-\sigma)a_3^\dagger-(\eta^*-\sigma^*)a_4^\dagger+a_3^\dagger a_4^\dagger\\
&\quad-\frac{1}{2}\,|\,\sigma\,|^2+\eta\gamma^*-\eta^*\gamma\Big]\,|\,0,0\rangle_{12}\otimes|\,0,0\rangle_{34}\\
&=\exp\left(\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)\exp\Big[\left(a_1^\dagger+\frac{1}{2}\sigma^*+a_3^\dagger+\gamma^*\right)\\
&\quad\cdot\left(-a_2^\dagger+\frac{1}{2}\sigma-a_4^\dagger-\gamma\right)+a_2^\dagger a_1^\dagger+a_3^\dagger a_4^\dagger\\
&\quad-\frac{1}{2}\,|\,\sigma\,|^2-\sigma a_3^\dagger+\sigma^*a_4^\dagger\Big]\,|\,0,0\rangle_{12}\,|\,0,0\rangle_{34}\\
&=\exp\Big(-\frac{1}{4}\,|\,\sigma\,|^2+\frac{1}{2}\sigma a_1^\dagger-a_4^\dagger a_1^\dagger-\gamma a_1^\dagger-\frac{1}{2}\sigma^*a_2^\dagger+\frac{1}{2}\sigma^*a_4^\dagger\\
&\quad-a_2^\dagger a_3^\dagger-\gamma a_3^\dagger-\gamma^*a_2^\dagger-a_4^\dagger\gamma^*-\frac{1}{2}\sigma a_3^\dagger-|\,\gamma\,|^2\Big)\,|\,0,0\rangle_{12}\\
&\quad\otimes|\,0,0\rangle_{34}\\
&=\exp\Big[-\frac{1}{2}\left|\gamma+\frac{1}{2}\sigma\right|^2-\left(\gamma+\frac{1}{2}\sigma\right)a_3^\dagger-\left(\gamma^*+\frac{1}{2}\sigma^*\right)a_2^\dagger\\
&\quad-a_2^\dagger a_3^\dagger\Big]\,|\,0,0\rangle_{23}\otimes\exp\Big[-\frac{1}{2}\left|\gamma-\frac{1}{2}\sigma\right|^2+\left(\frac{1}{2}\sigma-\gamma\right)a_1^\dagger\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}\sigma^*-\gamma^*\right)a_4^\dagger-a_4^\dagger a_1^\dagger\Big]\,|\,0,0\rangle_{14}。
\end{aligned}\tag{12.64}$$

与两粒子坐标和及动量差算符的共同本征态

$$|\zeta\rangle_{12}=\exp\left[-\frac{1}{2}|\zeta|^2+\zeta a_1^\dagger+\zeta^* a_2^\dagger-a_2^\dagger a_1^\dagger\right]|0,0\rangle_{12},$$

$$\zeta=\frac{\zeta_1+\mathrm{i}\zeta_2}{\sqrt{2}} \tag{12.65}$$

相比较，可知

$$|\quad\rangle|_{\gamma,\sigma}=|\zeta=-\gamma-\frac{\sigma}{2}\rangle_{23}\otimes|\zeta=-\gamma+\frac{\sigma}{2}\rangle_{14}。 \tag{12.66}$$

从上式可见，原来毫不相干的 2—3 粒子、1—4 粒子经过积分变换而纠缠起来。

12.6 纠缠交换算符[113]

本节将指出，理论上也可以借助纠缠交换算符实现纠缠交换。为了说明这一点，由(12.64)式及(2.9)式考察

$$\exp[\mathrm{i}(P_1+P_2)(X_3+X_4)+\mathrm{i}(P_3-P_4)(X_1-X_2)]|\quad\rangle|_{\gamma,\sigma}$$
$$=\exp\left(\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\exp\{\mathrm{i}[\eta_2(X_3+X_4)+\eta_1(P_3-P_4)]\}$$
$$\cdot|\eta\rangle_{12}\otimes|\eta-\sigma\rangle_{34}\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)。 \tag{12.67}$$

为了进一步化简它，由 IWOP 技术的推导可知

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta-\sigma\rangle_{34\,34}\langle\eta|$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}:\exp\left[-|\eta|^2+\eta\left(a_3^\dagger-a_4+\frac{\sigma^*}{2}\right)+\eta^*\left(a_3-a_4^\dagger+\frac{\sigma}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}|\sigma|^2-\sigma a_3^\dagger+\sigma^* a_4^\dagger+a_4^\dagger a_3^\dagger+a_3a_4-a_3^\dagger a_3-a_4^\dagger a_4\right]:$$
$$=:\exp\left[\frac{1}{2}\sigma^*(a_3+a_4^\dagger)-\frac{1}{2}\sigma(a_3^\dagger+a_4)-\frac{1}{4}|\sigma|^2\right]:$$
$$=\exp\left[\frac{1}{2}\sigma^*(a_3+a_4^\dagger)-\frac{1}{2}\sigma(a_3^\dagger+a_4)\right]$$

$$=\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}[-(X_3+X_4)\sigma_2+(P_3-P_4)\sigma_1]\right\},\quad(12.68)$$

式中$\sigma=\frac{\sigma_1+\mathrm{i}\sigma_2}{\sqrt{2}}$。这意味着

$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}[-(X_3+X_4)\sigma_2+(P_3-P_4)\sigma_1]\right\}|\eta'\rangle_{34}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta-\sigma\rangle_{34\,34}\langle\eta|\eta'\rangle_{34}$$

$$=|\eta'-\sigma\rangle_{34}。\quad(12.69)$$

把它代入(12.67)式,得

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(P_1+P_2)(X_3+X_4)+\frac{\mathrm{i}}{2}(P_3-P_4)(X_1-X_2)\right]|\quad\rangle|_{\gamma,\sigma}$$

$$=\exp\left(\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle_{12}\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)\otimes|-\sigma\rangle_{34}$$

$$=\exp\left(\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)|\zeta=2\gamma\rangle_{12}\otimes|-\sigma\rangle_{34}。\quad(12.70)$$

由此可见

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(P_1+P_2)(X_3+X_4)-\frac{\mathrm{i}}{2}(P_3-P_4)(X_1-X_2)\right]$$

$$\cdot|\zeta=\gamma\rangle_{12}\otimes|-2\sigma\rangle_{34}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle_{12}\otimes|\eta-\sigma\rangle_{34}\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)$$

$$=\exp\left(-\frac{\gamma\sigma^*-\gamma^*\sigma}{2}\right)|\zeta=-\gamma-\frac{\sigma}{2}\rangle_{23}\otimes|\zeta=-\gamma+\frac{\sigma}{2}\rangle_{14}。$$

$$(12.71)$$

也就是说(12.64)式中的交迭积分可以用算符 $\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(P_1+P_2)(X_3+X_4)+\frac{\mathrm{i}}{2}(P_3-P_4)(X_1-X_2)\right]$来实现,所以它是一个纠缠交换算符。

综上所述,纠缠态表象为讨论连续态的量子隐态传输的研究及各种计算提供了方便,在讨论过程中物理概念也很清晰,这是因

为纠缠态表象是完备的，其形式也简明。这也给了我们一个启示，即凡是具有纠缠现象的物理过程或物理系统，应该尽量用纠缠态表象来描绘。

第十三章

作为量子计算器元件的超导约瑟夫森结与纠缠态表象

13.1 约瑟夫森结等效电路的量子化理论与纠缠态表象

超导约瑟夫森结现在越来越受到人们的关注，其原因之一是它不但可用于各种精密的量子测量[114]（如超导量子干涉仪），还可以用来模拟量子计算器，是量子比特的生成元件。由于它是一种固体器件，其实用性更为人们看好。本章将用纠缠态表象来研究约瑟夫森结及超导量子干涉仪，并讨论约瑟夫森结处在外加偏压与偏流情况下的流方程（算符方程、海森堡图像）。

先稍回顾一下约瑟夫森超导结的研究历史。1959 年，美国物理学家加埃弗（Ivar Giaever）把一块超导体和一块正常导体连接在一起，中间夹入一块很薄的绝缘介质，在超导体与导体两边加上电压后，发现有电子穿过的隧道效应。1960 年，他把两边都换成超导体，仍发现有隧道效应。到了 1962 年，英国物理学家约瑟夫森对加埃弗的实验进行了深入的理论研究，发现当在由两个弱连接的超导体组成的结两边加上一定电压后，有特定频率的交流超导电流存在；而当结两边的电压为零时，电子对能够穿过结而形成直流电流。后来费恩曼在薛定谔图像中导出了约瑟夫森电流公式：

$$I = I_C \sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}, \tag{13.1}$$

式中 φ 是结两侧超导体中宏观量子波函数的相位差，I_C 是在温度为 T 时无噪声情况下的最大约瑟夫森电流。当 $V=0$ 时，φ 为常数，I 为有限超流，此即直流约瑟夫森效应。当 $V\neq 0$ 时，积分可得 $\varphi=\frac{2eV}{\hbar}t+\varphi_0$，$I=I_C\sin(\omega t+\varphi_0)$，此即交流约瑟夫森效应。

一种分析约瑟夫森结的有效途径是等效电路理论[115]。在忽略结电阻的情况下，可以用两个超导平行板组成的电容来描述约瑟夫森效应。此电容器所对应的薛定谔方程是

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}t} = W_n f_n, \tag{13.2}$$

式中 f_n 表示电容储存 n 个荷（n 个库柏对）的概率振幅，$W_n=\frac{n^2q^2}{2C}$ 是电容的储能。想像构造一个微观尺度的"桥"连接两块平行超导板，使得库柏对能够穿越，则方程（13.2）变为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}t} = f_n n^2\frac{q^2}{2C} - \frac{\hbar v}{2}(f_{n+1}+f_{n-1}), \tag{13.3}$$

式中 $\frac{\hbar v}{2}$ 是对应穿越一个库柏对的能量。引入

$$u(\theta,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{13.4}$$

则由（13.3）式可得 $u(\theta,t)$ 所满足的方程

$$\frac{\mathrm{i}\hbar\mathrm{d}u(\theta,t)}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{q^2}{2C}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - E_j\cos\theta\right)u(\theta,t), \tag{13.5}$$

式中 $E_j\equiv v\hbar$。当在电容上加一个法拉弟电压 $V=-\frac{\mathrm{d}\phi}{c\mathrm{d}t}$，$\phi$ 是磁通量，c 是光速，则（13.5）式变为

$$\frac{\mathrm{i}\hbar\mathrm{d}U(\theta,t)}{\mathrm{d}t} = H_{\mathrm{eff}}U(\theta,t), \tag{13.6}$$

式中

$$U(\theta,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t)\exp\left[\mathrm{i}n\left(\theta+\frac{q\phi}{\hbar c}\right)\right]。\qquad(13.7)$$

有效哈密顿量为

$$H_{\mathrm{eff}}=-\frac{q^2}{2C}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-v\hbar\cos\left(\theta+\frac{q\phi}{\hbar c}\right),\qquad(13.8)$$

通过电路元件的电流是

$$J=-c\frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\phi}=-qv\sin\left(\theta+\frac{q\phi}{\hbar c}\right)。\qquad(13.9)$$

如果要在海森堡图像中讨论问题，那就要问对应于(13.5)式的哈密顿算符是什么？它在什么表象下能成功地投影出(13.5)式？要回答上述问题，先得回忆 Feynman 的思想[116]：约瑟夫森流是由组成结的两块超导体之间波函数相位差决定的，同时他把一个库柏对组成的一个束缚对看作是玻色粒子（但要注意库柏对是一个费米对，它们并不满足玻色对易关系）。可引入以玻色算符表示的相算符：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}=\sqrt{\frac{a-b^{\dagger}}{a^{\dagger}-b}},\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}=\sqrt{\frac{a^{\dagger}-b}{a-b^{\dagger}}},$$
$$\cos\Phi=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}),\qquad(13.10)$$

式中$[a,a^{\dagger}]=[b,b^{\dagger}]=1$。同时引入电荷算符

$$Q=q\mathcal{N},\quad \mathcal{N}\equiv a^{\dagger}a-b^{\dagger}b,\qquad(13.11)$$

则约瑟夫森结的哈密顿算符就是[117]

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2C}Q^2-v\hbar\cos\Phi。\qquad(13.12)$$

式中第一项代表结电容上储存的能量，而第二项负责结电流的隧穿。(13.12)式就是约瑟夫森结的等效电路的量子哈密顿算符(尚未施加外偏压与偏流)。

引入纠缠态

$$|\eta\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta a^{\dagger}-\eta^{*}b^{\dagger}+a^{\dagger}b^{\dagger}\right)|0,0\rangle,\qquad(13.13)$$

式中 $\eta=|\eta|e^{i\varphi}$,则在此表象下,

$$\langle\eta|\mathcal{N}=i\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle\eta|,\tag{13.14}$$

$$\langle\eta|[\Phi,\mathcal{N}]=\left[\varphi,i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\langle\eta|=-i\langle\eta|\rightarrow[\Phi,Q]=-qi。\tag{13.15}$$

因此,

$$\langle\eta|\mathcal{H}=\left(-\frac{q^2}{2C}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-v\hbar\cos\varphi\right)\langle\eta|,\tag{13.16}$$

即导致了(13.5)式。为了进一步导出(13.3)式,引入电荷隧穿表象$|n,r\rangle$,即把$|\eta\rangle$展开:

$$|\eta=re^{i\varphi}\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n,r\rangle e^{i\varphi n},\tag{13.17}$$

其反展开是

$$|n,r\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi|\eta=re^{i\varphi}\rangle e^{-i\varphi n}。\tag{13.18}$$

以$\mathcal{N}$作用之,得

$$\mathcal{N}|n,r\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi e^{-i\varphi n}\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)|\eta=re^{i\varphi}\rangle=n|n,r\rangle。\tag{13.19}$$

另一方面,又有

$$e^{i\Phi}|n,r\rangle=|n+1,r\rangle,\ e^{-i\Phi}|n,r\rangle=|n-1,r\rangle,\tag{13.20}$$

因而

$$\begin{aligned}\langle n,r|\mathcal{H}&=\langle n,r|\left(\frac{1}{2C}Q^2-v\hbar\cos\Phi\right)\\&=\frac{1}{2C}(qn)^2\langle n,r|-v\hbar\,\frac{1}{2}(\langle n+1,r|+\langle n-1,r|),\end{aligned}\tag{13.21}$$

此即(13.3)式。不难证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dr|n,r\rangle\langle n,r|=1,$$

$$\langle n,r \mid n',r'\rangle = \frac{1}{2r}\delta(r-r')\delta_{n,n'}。 \tag{13.22}$$

13.2　由约瑟夫森结的哈密顿算符导出约瑟夫森方程

从约瑟夫森结的哈密顿算符及海森堡方程，可以导出算符型的约瑟夫森方程。由于$[\cos\Phi,\mathcal{N}]=\mathrm{i}\sin\Phi$，所以隧穿电流方程为

$$I \equiv \frac{\partial}{\partial t}(q\mathcal{N}) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}q[\mathcal{N},\mathcal{H}] = \frac{1}{\hbar}qE_j\sin\Phi。 \tag{13.23}$$

而约瑟夫森第二方程是有关“相”的(或称为电压方程)：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\Phi,\mathcal{H}] = -\frac{1}{\hbar C}q^2\mathcal{N} = -\frac{1}{\hbar}qV,\\ V &= \frac{Q}{C} = \frac{q\mathcal{N}}{C},\end{aligned} \tag{13.24}$$

随之有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\frac{1}{\hbar C}q^2\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{N} = -\frac{E_j}{\hbar^2 C}q^2\sin\Phi。 \tag{13.25}$$

不仅如此，还可从(13.5)式导出数-相测不准关系

$$\Delta\mathcal{N}\cdot\Delta\cos\Phi \geqslant \langle\sin\Phi\rangle。 \tag{13.26}$$

13.3　有外偏压与外偏流时约瑟夫森结的哈密顿算符及方程[118]

当约瑟夫森结上置有偏压时，哈密顿算符变为

$$H' = H_0 + \mathcal{H}, \tag{13.27}$$

式中 $H_0 = qV\mathcal{N}$, $\mathcal{H} = \frac{1}{2C}Q^2 - v\hbar\cos\Phi$。用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}}a^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}} = a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}}b^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}} = b^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}$，以及

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}}\cos\Phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}} = \cos\Phi - \lambda\sin\Phi - \frac{1}{2!}\lambda^2\cos\Phi + \frac{1}{3!}\lambda^3\sin\Phi + \cdots$$

$$= \cos\Phi\cos\lambda - \sin\Phi\sin\lambda = \cos(\Phi+\lambda), \qquad (13.28)$$

把所要讨论的问题转到相互作用图像，即作变换

$$\exp\left(\frac{iH_0\Delta t}{\hbar}\right)\mathscr{H}\exp\left(-\frac{iH_0\Delta t}{\hbar}\right)$$

$$=\frac{1}{2C}Q^2 - v\hbar\cos\left(\Phi - \frac{qV\Delta t}{\hbar}\right)\equiv\mathscr{H}_1, \qquad (13.29)$$

式中 $\mathscr{H}_1$ 中下标 I 表示相互作用图像。当外偏压是法拉第形式的，即 $V=-\dfrac{\Delta\phi}{c\Delta t}$，$\phi$ 是磁通量，则

$$\mathscr{H}_1 = \frac{1}{2C}Q^2 - v\hbar\cos\left(\Phi + \frac{q\Delta\phi}{c\hbar}\right)。 \qquad (13.30)$$

由此导出

$$\langle\eta\mid\mathscr{H}_1\mid E\rangle_1 = \left[-\frac{q^2}{2C}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - v\hbar\cos\left(\varphi + \frac{q\Delta\phi}{c\hbar}\right)\right]\langle\eta\mid E\rangle_1, \qquad (13.31)$$

这与(13.8)式自洽。从(13.30)式导出：

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_1 = \frac{1}{i\hbar}[q\mathscr{N},\mathscr{H}_1] = qv\sin\left(\Phi + \frac{q\Delta\phi}{c\hbar}\right), \qquad (13.32)$$

这正好与(13.9)式自洽，反映了交流约瑟夫森效应。

另一方面，当有外偏流 I_{ex} 通过结电容时，由约瑟夫森第二方程 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}=\dfrac{qV}{\hbar}$ 可知，它诱导的能量为

$$\int I_{ex}V\mathrm{d}t = I_{ex}\int\frac{\hbar}{q}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)\mathrm{d}t = I_{ex}\frac{\hbar}{q}\Phi\equiv H_c, \qquad (13.33)$$

所以总的哈密顿量为 $\mathscr{H}+H_c$。作幺正变换：

$$\exp\left(\frac{iH_ct}{\hbar}\right)\mathscr{N}\exp\left(-\frac{iH_ct}{\hbar}\right) = \mathscr{N} + \left[I_{ex}\frac{i}{q}\Phi t,\mathscr{N}\right] = \mathscr{N} - I_{ex}\frac{1}{q}t, \qquad (13.34)$$

得

$$\exp\left(\frac{iH_ct}{\hbar}\right)\mathscr{H}\exp\left(-\frac{iH_ct}{\hbar}\right) = \frac{1}{2C}(q\mathscr{N} - I_{ex}t)^2 - E_j\cos\Phi\equiv\mathscr{H}'。 \qquad (13.35)$$

投影到$\langle\eta|$表象，得

$$\langle\eta|\mathscr{H}'=\left[\frac{1}{2C}\left(-\mathrm{i}q\frac{\partial}{\partial\varphi}-I_{\mathrm{ex}}t\right)^2-E_j\cos\varphi\right]\langle\eta|。\tag{13.36}$$

13.4　电荷态与相态表示

由于约瑟夫森电流是由两块弱连接的超导体之间的波函数相位差引起的，所以要强调相位算符 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$对态$|m,m\rangle$的作用$\left(|m,m\rangle=\frac{(a^\dagger b^\dagger)^m}{m!}|0,0\rangle\right)$而形成电荷态，即

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi})^q\ |m,m\rangle=\|q,m\rangle,\tag{13.37}$$

它是荷算符$\mathscr{N}$的本征态：

$$\mathscr{N}\|q,m\rangle=[\mathscr{N},(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi})^q]|m,m\rangle=-q\|q,m\rangle。\tag{13.38}$$

可见$|m,m\rangle$是代表未有约瑟夫森电流的状态，经 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$的作用而变成有隧穿电流的状态。由$\|q,m\rangle$可以进一步构造相态：

$$\|\varphi\rangle_m=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\|q,m\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\varphi},\tag{13.39}$$

它满足

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\|\varphi\rangle_m&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\|\varphi\rangle_m,\\\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\|\varphi\rangle_m&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\|\varphi\rangle_m。\end{aligned}\tag{13.40}$$

又由于

$$_m\langle\varphi\|\mathscr{N}=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}{}_m\langle\varphi\|,\tag{13.41}$$

故从(13.27)式得

$$_m\langle\varphi\|\mathscr{H}=\left[\frac{E_C}{2}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2-v\hbar\cos\varphi\right]_m\langle\varphi\|,\tag{13.42}$$

式中 $E_C=\frac{q^2}{C}$。

13.5 超导量子干涉仪的流算符方程[119]

可以把上述讨论推广到超导量子干涉仪，推导相应的电流算符方程和电压算符方程，为此须引入磁场的贡献。考虑干涉仪中存在外磁场，根据

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},\tag{13.43}$$

可知跨越超导量子干涉仪中一个结的附加电压是

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A},\\V_2&=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_2\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A},\end{aligned}\tag{13.44}$$

式中积分分别沿路径 1 与 2。根据法拉第定律：$V=-\dfrac{\Delta\phi}{c\Delta t}$，故有

$$\phi=\int_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}-\int_2\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}=\oint\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A},\tag{13.45}$$

式中 ϕ 是穿过超导量子干涉仪的回路的磁通量。令

$$\begin{aligned}\int_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}&=\frac{1}{2}(\phi+k),\\\int_2\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}&=-\frac{1}{2}(\phi-k),\end{aligned}\tag{13.46}$$

这里 k 是积分常数。所以描写干涉仪的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=H'+H_0,\\H'&=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2C}Q_i^2-E_j\cos\Phi_i\right),\\H_0&=\sum_{i=1}^{2}q\mathcal{N}_iV_i,\end{aligned}\tag{13.47}$$

式中

$$Q_i=q\mathcal{N}_i,\quad \mathcal{N}_i\equiv a_i^{\dagger}a_i-b_i^{\dagger}b_i,\quad i=1,2。\tag{13.48}$$

由(13.47)式导出的电压算符方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_i = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\Phi_i, H] = -\frac{q}{\hbar}\nu_i - \frac{q}{\hbar c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}, \quad (13.49)$$

式中

$$\nu_i = \frac{Q_i}{C} = \frac{q\mathcal{N}_i}{C}。 \quad (13.50)$$

将(13.49)式积分，得

$$\Phi_i(t) = -\frac{q}{\hbar}\int \nu_i \mathrm{d}t - \frac{q}{\hbar c}\int_i \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}。 \quad (13.51)$$

作变换 $\exp\left(\frac{\mathrm{i}H_0\Delta t}{\hbar}\right)H'\exp\left(-\frac{\mathrm{i}H_0\Delta t}{\hbar}\right)$，过渡到相互作用图像中，由

$$\begin{aligned}\exp(-\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}_i)\cos\Phi_i\exp(\mathrm{i}\lambda\mathcal{N}_i) &= \cos\Phi_i - \lambda\sin\Phi_i - \frac{1}{2!}\lambda^2\cos\Phi_i \\ &\quad + \frac{1}{3!}\lambda^3\sin\Phi_i + \cdots \\ &= \cos\Phi_i\cos\lambda - \sin\Phi_i\sin\lambda \\ &= \cos(\Phi_i + \lambda),\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{\mathrm{i}H_0\Delta t}{\hbar}\right)H'\exp\left(-\frac{\mathrm{i}H_0\Delta t}{\hbar}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{2C}Q_i^2 - E_j\cos\left(\Phi_i - \frac{qV_i\Delta t}{\hbar}\right)\right] = \mathscr{H}^{(\mathrm{I})}, \quad (13.52)\end{aligned}$$

式中上标(I)意味着相互作用图像。令 $q=2e$，用(13.52)式和(13.46)式导出在相互作用图像中的流算符方程：

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\mathcal{N}_i, \mathscr{H}^{(\mathrm{I})}] = \frac{1}{\hbar}E_j\sin\left(\Phi_i - \frac{qV_i\Delta t}{\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{\hbar}E_j\sin\left[\Phi_i - \frac{e(\phi+k)}{c\hbar}\right], \quad (13.53)\end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{1}{\hbar}E_j\sin\left[\Phi_i + \frac{e(\phi-k)}{c\hbar}\right]。 \quad (13.54)$$

当 $\Phi_1=\Phi_2=\Phi$ 时，把(13.53)式与(13.54)式相加，得干涉仪中的

流算符

$$J = \frac{2}{\hbar}E_j\sin\left(\Phi - \frac{ek}{c\hbar}\right)\cos\left(\frac{e\phi}{c\hbar}\right)$$
$$= \frac{2}{\hbar}E_j\sin\left(\Phi - \frac{ek}{c\hbar}\right)\cos\left(\frac{2\pi\phi}{\phi_0}\right), \tag{13.55}$$

式中 $\phi_0 = \frac{hc}{e}$ 是基本单元的通量量子，上式表明流的振荡由 $\cos\left(\frac{2\pi\phi}{\phi_0}\right)$ 所决定。

以上导出的电流算符、电压算符方程与 c 数约瑟夫森方程相符，这说明用纠缠态表象给出的算符哈密顿量是可取的，它是用 Heisenberg 图像来研究约瑟夫森结的理论

13.6　关于约瑟夫森结的路径积分理论[120]

本节介绍由描述约瑟夫森结的哈密顿算符，建立在纠缠态表象中的路径积分理论。为此，定义 $|\eta\rangle$ 态的傅里叶变换：

$$|\chi\rangle = \int\frac{d^2\eta}{2\pi}|\eta\rangle\exp\left[\frac{i}{2}(\chi\eta^* + \chi^*\eta)\right]$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}|\chi|^2 + i\chi a^\dagger - i\chi^* b^\dagger - a^\dagger b^\dagger\right)|0,0\rangle, \tag{13.56}$$

它具有完备性：

$$\int\frac{d^2\chi}{\pi}|\chi\rangle\langle\chi| = 1,\quad \langle\chi|\chi'\rangle = \pi\delta(\chi-\chi')\delta(\chi^*-\chi'^*)。 \tag{13.57}$$

$\langle\chi|$ 与 $|\eta\rangle$ 的内积是

$$\langle\chi|\eta\rangle = \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{i}{2}(\chi\eta^* + \chi^*\eta)\right]。 \tag{13.58}$$

由纠缠态表象完备性，可将 H 展开为

$$H(a^\dagger,a;b^\dagger,b)=\int\frac{d^2\eta' d^2\chi' d^2\eta'' d^2\chi''}{\pi^4}|\chi'\rangle\langle\chi'|\eta'\rangle\langle\eta'|H|\eta''\rangle$$
$$\cdot\langle\eta''|\chi''\rangle\langle\chi''|$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{d^2\eta' d^2\chi' d^2\eta'' d^2\chi''}{\pi^4}|\chi'\rangle\langle\chi''|\langle\eta'|H|\eta''\rangle$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}(\chi'\eta'^*+\chi'^*\eta'-\chi''^*\eta''-\eta''^*\chi'')\right]。\tag{13.59}$$

作积分变数变换：

$$\eta'=\eta+\frac{\sigma}{2},\quad \chi'=\chi+\frac{\lambda}{2},$$
$$\chi''=\chi-\frac{\lambda}{2},\quad \eta''=\eta-\frac{\sigma}{2},\tag{13.60}$$
$$d^2\chi' d^2\chi''=d^2\chi d^2\lambda,\quad d^2\eta' d^2\eta''=d^2\eta d^2\sigma,$$

则有

$$H=\int\frac{d^2\chi d^2\eta d^2\lambda d^2\sigma}{4\pi^4}|x+\frac{\lambda}{2}\rangle\langle x-\frac{\lambda}{2}|\langle\eta+\frac{\sigma}{2}|H|\eta-\frac{\sigma}{2}\rangle$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{i(\lambda\eta^*+\lambda^*\eta+\chi^*\sigma+\chi\sigma^*)}{2}\right]。\tag{13.61}$$

引入双模 Wigner 算符：

$$\int\frac{d^2\lambda}{\pi}|\chi+\frac{\lambda}{2}\rangle\langle x-\frac{\lambda}{2}|\exp\left[-\frac{i(\lambda\eta^*+\lambda^*\eta)}{2}\right]\equiv\Delta(\chi,\eta)\tag{13.62}$$

及

$$\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\langle\eta+\frac{\sigma}{2}|H|\eta-\frac{\sigma}{2}\rangle\exp\left[-\frac{i}{2}(\chi^*\sigma+\chi\sigma^*)\right]$$
$$\equiv h(\chi,\eta),\tag{13.63}$$

就可把 $\langle\chi'|H|\chi''\rangle$ 表达为

$$\langle\chi'|H|\chi''\rangle=\int\frac{d^2\chi d^2\eta}{4}h(\chi,\eta)\int\frac{d^2\lambda}{\pi}\exp\left(-\frac{i(\lambda\eta^*+\lambda^*\eta)}{2}\right)$$

$$\cdot\,\delta^{(2)}\left(\chi'-\chi-\frac{\lambda}{2}\right)\delta^{(2)}\left(\chi-\frac{\lambda}{2}-\chi''\right)$$

$$=\int\frac{d^2\chi d^2\eta}{\pi}h(\chi,\eta)\delta^{(2)}(\chi''+\chi'-2\chi)$$

$$\cdot\exp\{-i[(\chi'-\chi)\eta^*+(\chi'-\chi)^*\eta]\}$$

$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi}h\left(\frac{\chi''+\chi'}{2},2\eta\right)\exp\{-i[\eta^*(\chi'-\chi'')+(\chi'^*-\chi''^*)\eta]\}。\tag{13.64}$$

根据 Feynman 路径积分理论，考虑

$$\langle\chi'',t''\mid\chi',t'\rangle=\langle\chi''\mid\exp[-iH(t''-t')]\mid\chi'\rangle$$

$$=\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^2\chi_i}{\pi}\prod_{j=1}^{n+1}\langle\chi_j\mid e^{-i\epsilon H}\mid\chi_{j-1}\rangle,\tag{13.65}$$

式中 $\chi''=\chi_{n+1},\chi'=\chi_0,\epsilon=\dfrac{t''-t'}{n+1}\to0$。(13.65)式中的

$$\langle\chi_j\mid e^{-i\epsilon H}\mid\chi_{j-1}\rangle=\pi\delta^{(2)}(\chi_j-\chi_{j-1})-i\epsilon\langle\chi_j\mid H\mid\chi_{j-1}\rangle$$

$$=\int\frac{d^2\eta_j}{\pi}\exp\Big\{-i[\eta_j^*(\chi_j-\chi_{j-1})+\eta_j(\chi_j^*-\chi_{j-1}^*)]$$

$$\cdot\left[1-i\epsilon h\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2},2\eta_j\right)\right]\Big\}$$

$$=\int\frac{d^2\eta_j}{\pi}\exp\Big\{-i[\eta_j^*(\chi_j-\chi_{j-1})+\eta_j(\chi_j^*-\chi_{j-1}^*)]$$

$$-i\epsilon h\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2},2\eta_j\right)\Big\}。\tag{13.66}$$

把它代入(13.65)式，得

$$\langle\chi'',t''\mid\chi',t'\rangle=\int\prod_t\frac{d^2\chi(t)d^2\eta(t)}{\pi^2}\exp\Big\{i\int_{t'}^{t''}dt\Big[-\frac{d\chi^*(t)}{dt}\eta(t)$$

$$-\frac{d\chi(t)}{dt}\eta^*(t)\Big]-h[\chi(t),2\eta(t)]\Big\}。\tag{13.67}$$

当 H 取约瑟夫森结的哈密顿量(13.12)式时，(13.63)式给出

$$\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\langle\eta+\frac{\sigma}{2}\mid\left[\frac{E_C}{2}\mathcal{N}^2+E_j(1-\cos\Phi)\right]\mid\eta-\frac{\sigma}{2}\rangle$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}(\chi^*\sigma+\chi\sigma^*)}{2}\right]=h(\chi,\eta)。\tag{13.68}$$

先计算

$$\int \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\pi}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(\chi^*\sigma+\chi\sigma^*)}{2}\right]\langle\eta+\frac{\sigma}{2}\,|\,(a^\dagger a-b^\dagger b)^2\,|\,\eta-\frac{\sigma}{2}\rangle\equiv I_1。\tag{13.69}$$

令 $\alpha=\eta-\frac{\sigma}{2}$，$\alpha=|\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，并在上式中插入 $|\chi\rangle|_{\chi=\xi}$ 的完备性关系，得

$$\begin{aligned}I_1=&\ 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)}\\&\cdot\langle 2\eta-\alpha\,|\,(a^\dagger a-b^\dagger b)^2\,|\,\alpha\rangle\\=&-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)}\\&\cdot\langle 2\eta-\alpha\,|\,\xi\rangle\langle\xi\,|\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,|\,\alpha\rangle。\end{aligned}\tag{13.70}$$

利用(13.58)式，可得

$$\begin{aligned}I_1=&-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)}\\&\cdot\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\xi(2\eta-\alpha)^*+\xi^*(2\eta-\alpha)\right]\right\}\\&\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\xi^*+\xi\alpha^*)\right],\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\xi^*+\xi\alpha^*)\right]\\&=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\xi^*+\alpha^*\xi)\right]\left[\left(\frac{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}{2}\right)^2+\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\xi^*+\alpha^*\xi)\right]。\end{aligned}\tag{13.71}$$

把它代入(13.70)式，得

$$I_1=Z_1+Z_2,\tag{13.72}$$

$$Z_1\equiv-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A(\alpha,\xi)}\left(\frac{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}{2}\right)^2,\tag{13.73}$$

$$Z_2 \equiv -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\iint \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A(\alpha,\xi)}\ \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\xi^*+\alpha^*\xi), \tag{13.74}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A(\alpha,\xi)} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)+(\eta^*\xi+\eta\xi^*)-(\alpha\xi^*+\alpha^*\xi)]}。\tag{13.75}$$

Z_1 的计算可以分两个步骤进行：

$$Z_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha_1\chi_1+\alpha_2\chi_2)}Y_1, \tag{13.76}$$

式中

$$\begin{aligned}Y_1 &\equiv \int \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}[\xi_1(\eta_1-\alpha_1)+\xi_2(\eta_2-\alpha_2)]}(\alpha_2^2\xi_1^2+\alpha_1^2\xi_2^2-2\alpha_1\alpha_2\xi_1\xi_2)\\ &= -(2\pi)^2\Big\{\alpha_1^2\delta[2(\eta_1-\alpha_1)]\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}[2(\eta_2-\alpha_2)]^2}\delta[2(\eta_2-\alpha_2)]\\ &\quad+\alpha_2^2\delta[2(\eta_2-\alpha_2)]\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}[2(\eta_1-\alpha_1)]^2}\delta[2(\eta_1-\alpha_1)]\\ &\quad-2\alpha_1\alpha_2\prod_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}[2(\eta_i-\alpha_i)]}\delta[2(\eta_i-\alpha_i)]\Big\}。\end{aligned}\tag{13.77}$$

把(13.77)式代入(13.76)式，并令 $2(\eta_i-\alpha_i)=\beta_i$，积分得

$$\begin{aligned}Z_1 &= -\int \mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_1\chi_1+\beta_2\chi_2)}\Big[\Big(\eta_1-\frac{\beta_1}{2}\Big)^2\delta(\beta_1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta_2^2}\delta(\beta_2)\\ &\quad+\Big(\eta_2-\frac{\beta_2}{2}\Big)^2\delta(\beta_2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta_1^2}\delta(\beta_1)-2\Big(\eta_1-\frac{\beta_1}{2}\Big)\\ &\quad\cdot\Big(\eta_2-\frac{\beta_2}{2}\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_1}\delta(\beta_1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_2}\delta(\beta_2)\Big]\\ &= \eta_1^2\chi_2^2+\eta_2^2\chi_1^2+2\prod_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta_i}\Big[\Big(\eta_i-\frac{\beta_i}{2}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_i\chi_i}\Big]\Big|_{\beta_i=0}\\ &= -\Big(\frac{\chi\eta^*-\chi^*\eta}{2}\Big)^2+\mathrm{i}\frac{1}{2}(\chi\eta^*+\chi^*\eta)+\frac{1}{2}。\end{aligned}\tag{13.78}$$

类似地，可导出

$$\begin{aligned}Z_2 &= -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha_1\chi_1+\alpha_2\chi_2)}\\ &\quad\cdot\Big[\alpha_1\int\mathrm{d}\xi_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi_1(\eta_1-\alpha_1)}\mathrm{i}\xi_1\int\mathrm{d}\xi_2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi_2(\eta_2-\alpha_2)}\end{aligned}$$

$$+\alpha_2\int d\xi_1 e^{2i\xi_1(\eta_1-\alpha_1)}\int d\xi_2 e^{2i\xi_2(\eta_2-\alpha_2)} i\xi_2\Big]$$

$$=-4\pi^2 e^{-i(\eta\chi^*+\chi\eta^*)}\int\frac{d^2\alpha}{\pi^2}e^{2i(\alpha_1\chi_1+\alpha_2\chi_2)}\Big\{\alpha_1\delta[2(\eta_2-\alpha_2)]$$

$$\cdot\frac{d}{d[2(\eta_1-\alpha_1)]}\delta[2(\eta_1-\alpha_1)]+\alpha_2\delta[2(\eta_1-\alpha_1)]$$

$$\cdot\frac{d}{d[2(\eta_2-\alpha_2)]}\delta[2(\eta_2-\alpha_2)]\Big\}$$

$$=-\frac{i}{2}(\chi\eta^*+\chi^*\eta)-1, \tag{13.79}$$

故(13.72)式变为

$$I_1=-\left(\frac{\chi\eta^*-\chi^*\eta}{2}\right)^2-\frac{1}{2}。 \tag{13.80}$$

再考虑(13.68)式中的第二部分：

$$I_2\equiv\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\exp\left[-\frac{i}{2}(\chi^*\sigma+\chi\sigma^*)\right]\langle\eta+\frac{\sigma}{2}|\cos\Phi|\eta-\frac{\sigma}{2}\rangle。 \tag{13.81}$$

仍作变换 $\alpha=\eta-\frac{\sigma}{2}$，$\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$，得

$$I_2=4e^{-i(\chi\eta^*+\eta\chi^*)}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{i(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)}\langle 2\eta-\alpha|\alpha\rangle\cos\theta$$

$$=4e^{-i(\chi\eta^*+\eta\chi^*)}\int d^2\alpha e^{i(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)}\delta(2\eta-2\alpha)\delta(2\eta^*-2\alpha^*)\cos\theta$$

$$=\cos\varphi, \tag{13.82}$$

式中 $\varphi\equiv\arg\eta$。按照(13.68)式合并 I_1 与 I_2 的值，得

$$h(\chi,\eta)=-\frac{E_C}{2}\left[\left(\frac{\chi\eta^*-\chi^*\eta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]+E_j(1-\cos\varphi), \tag{13.83}$$

根据(13.65)式、(13.67)式以及(13.83)式，最终得到约瑟夫森结的路径积分形式：

$$\langle\chi'',t''|\chi',t'\rangle=\int\prod_t\frac{d^2\chi(t)d^2\eta(t)}{\pi^2}\exp\Big(i\int_{t'}^{t''}dt\Big[-\frac{d\chi^*(t)}{dt}\eta(t)$$

$$-\frac{\mathrm{d}\chi(t)}{\mathrm{d}t}\eta^{*}(t)\Big]+\frac{E_C}{2}[\chi(t)\eta^{*}(t)-\chi^{*}(t)\eta(t)]^2$$

$$+\frac{E_C}{4}-E_j\{1-\cos[\arg 2\eta(t)]\}\Big)。\tag{13.84}$$

第十四章

有序算符内积分技术的若干应用

14.1 径向坐标算符幂次的正规乘积展开[121]

平坦空间坐标 X 的 n 幂次的正规乘积展开可用积分

$$X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mid x\rangle\langle x \mid \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{d}x : \exp[-(x-X)^2]: \tag{14.1}$$

给出。如把三维空间坐标转换为球坐标：

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta, \tag{14.2}$$

相应的径向坐标算符可由下式定义：

$$\hat{r}^n = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid r^n。 \tag{14.3}$$

那么，什么是 $\hat{r}^n$ 的正规乘积展开呢？这个问题在以往的文献中并无现成答案。以下用 IWOP 技术求之。由(1.16)式知

$$\begin{aligned}\mid \boldsymbol{x}\rangle = \pi^{-\frac{3}{4}} \exp\Big[&-\frac{1}{2}r^2 + \sqrt{2}r(\sin\theta\cos\varphi a_1^\dagger \\ &+ \sin\theta\sin\varphi a_2^\dagger + \cos\theta a_3^\dagger) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i^{\dagger 2}\Big] \mid 0,0,0\rangle。\end{aligned} \tag{14.4}$$

所以在球坐标下：

$$\begin{aligned}\mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid = \pi^{-\frac{3}{2}} : \exp\Big\{&-r^2 + \sqrt{2}r[\sin\theta\cos\varphi(a_1^\dagger + a_1) \\ &+ \sin\theta\sin\varphi(a_2^\dagger + a_2) + \cos\theta(a_3^\dagger + a_3)]\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{2}(a_i^{\dagger 2}+a_i^2)+a_i^\dagger a_i\right]\Big\}:$$

$$=\pi^{-\frac{3}{2}}:\exp\Big[-r^2+2r(\sin\theta\cos\varphi X_1+\sin\theta\sin\varphi X_2$$

$$+\cos\theta X_3)-\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{a_i+a_i^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2\Big]:$$

$$=\pi^{-\frac{3}{2}}:\exp(-r^2+2r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2):,\tag{14.5}$$

式中 $X_i=\dfrac{a_i+a_i^\dagger}{\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{n}$ 是方向幺矢：

$$\boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)。\tag{14.6}$$

注意算符 $\boldsymbol{X}$ 现已在正规乘积内部，可以当所积分的参量。用IWOP技术先对极角与方位角积分，并用泊松积分公式：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta f(m\sin\theta\cos\varphi+n\sin\theta\sin\varphi+k\cos\theta)$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{m^2+n^2+k^2})\mathrm{d}u,\tag{14.7}$$

得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}\,|=\pi^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta$$

$$\cdot:\exp(-r^2+2r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2):$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}r^2\mathrm{d}r\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u:\exp(-r^2+2ru$$

$$\cdot\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}-\boldsymbol{X}^2):$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}r^2\mathrm{d}r:\frac{1}{2r\,|\,\hat{r}\,|}\exp(-r^2$$

$$+2ru\,|\,\hat{r}\,|-|\,\hat{r}\,|^2)\Big|_{-1}^{1}:$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r:\frac{r}{|\,\hat{r}\,|}\{\exp[-(r-|\,\hat{r}\,|)^2]$$

$$-\exp[-(r+|\,\hat{r}\,|)^2]\}:,\tag{14.8}$$

式中已经定义了

$$|\hat{r}| \equiv (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^{\frac{1}{2}}。 \tag{14.9}$$

为了验证(14.8)式，可以进一步对 dr 积分，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r : \Big\{ \frac{1}{|\hat{r}|}(r - |\hat{r}| + |\hat{r}|)\exp[-(r-|\hat{r}|)^2] \\ &\quad - \frac{1}{|\hat{r}|}(r + |\hat{r}| - |\hat{r}|)\exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\Big\} : \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r : \{\exp[-(r-|\hat{r}|)^2] + \exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\} : \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r : \frac{(r-|\hat{r}|)}{|\hat{r}|}\exp[-(r-|\hat{r}|)^2] : \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r : \frac{(r+|\hat{r}|)}{|\hat{r}|}\exp[-(r+|\hat{r}|)^2] :。\end{aligned} \tag{14.10}$$

由于在正规乘积内部$|\hat{r}|$可被认为是积分参量，由平移积分变数可知(14.10)式中后两项恰是

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} \mathrm{d}r : \frac{(r \pm |\hat{r}|)}{|\hat{r}|}\exp[-(r \pm |\hat{r}|)^2] : \\ &= \frac{1}{|\hat{r}|}\int_{\pm|\hat{r}|}^{\infty} r\mathrm{d}r : \exp(-r^2) : \\ &= : \frac{1}{2|\hat{r}|}\exp(-|\hat{r}|^2) :。\end{aligned} \tag{14.11}$$

于是可以相互抵消，即(14.10)式变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}r : \frac{r}{|\hat{r}|}\{\exp[-(r-|\hat{r}|)^2] - \exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\} : \\ &= \int_{-|\hat{r}|}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}} : \exp(-r^2) : + \int_{|\hat{r}|}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}} : \exp(-r^2) :\end{aligned}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}:\exp(-r^2):=1。\qquad(14.12)$$

这就验证了(14.8)式,即三维坐标表象$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}\mid$在球坐标空间中确实被真正地实现了积分,结果为1。由此可进一步求$\hat{r}^{2m}$的正规乘积展开,注意按(14.8)式的定义:

$$I_{n\pm}\equiv\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}:\frac{r^{n+1}}{|\hat{r}|}\exp[-(r\pm|\hat{r}|)^2]:$$

$$=\int_{\pm|\hat{r}|}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}:\frac{(r\mp|\hat{r}|)^{n+1}}{|\hat{r}|}\exp(-r^2):$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k:\left(\int_0^{\infty}+\int_{\pm|\hat{r}|}^{0}\right)r^k\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}\,|\hat{r}|}$$

$$\cdot(\mp|\hat{r}|)^{n+1-k}\exp(-r^2):,\qquad(14.13)$$

式中$n>-2$。所以

$$\hat{r}^n=I_{n-}-I_{n+}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k:|\hat{r}|^{n-k}[1-(-1)^{n+1-k}]$$

$$\cdot\int_0^{\infty}r^k\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}\exp(-r^2):+\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k:|\hat{r}|^{n-k}[1+(-1)^{n+1}]$$

$$\cdot(-1)^k\int_0^{|\hat{r}|}r^k\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}\exp(-r^2):。\qquad(14.14)$$

当$n=2m$,$1+(-1)^{n+1}=0$,而$1-(-1)^{n+1-k}=1+(-1)^k\neq0$,当且仅当$k$是偶数;令$k=2l$,则上式变为

$$\hat{r}^{2m}=2\sum_{l=0,1,\cdots}^{m}C_{2m+1}^{2l}:|\hat{r}|^{2m-2l}\int_0^{\infty}r^{2l}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}\exp(-r^2):$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\frac{(2m+1)!}{4^l(2m+1-2l)!\,l!}:|\hat{r}|^{2m-2l}:。\qquad(14.15)$$

这是一个新的算符恒等式。特别当$m=1$,上式给出

$$\hat{r}^2 = :|\hat{r}|^2: + \frac{3}{2},$$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = :(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2): + \frac{3}{2}。\tag{14.16}$$

所以,(14.15)式也就变为

$$(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m+1)!}{4^k(2m+1-2k)!k!} :(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^{m-k}: \tag{14.17}$$

当 $m=2,3$ 时,有

$$\hat{r}^4 = :|\hat{r}|^4: + :5|\hat{r}|^2: + \frac{15}{4},$$

$$\hat{r}^6 = :|\hat{r}|^6: + :\frac{21}{2}|\hat{r}|^4: + :\frac{105}{4}|\hat{r}|^2: + \frac{105}{8}。\tag{14.18}$$

对于 $n=-2$,有

$$\begin{aligned}
\hat{r}^{-2} &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}} :\frac{r^{-1}}{|\hat{r}|}\{\exp[-(r-|\hat{r}|)^2] - \exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\}: \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}} :\frac{1}{r|\hat{r}|}(\mathrm{e}^{2r|\hat{r}|} - \mathrm{e}^{-2r|\hat{r}|})\exp(-r^2 - |\hat{r}|^2): \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}} :\frac{2(2r|r|)^{2k+1}}{(2k+1)!r|\hat{r}|}\exp(-r^2 - |\hat{r}|^2): \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} :\frac{2^{2k+1}|\hat{r}|^{2k}}{(2k+1)!}\exp(-|\hat{r}|^2): \int_0^\infty \frac{2r^{2k}}{\sqrt{\pi}}\exp(-r^2)\mathrm{d}r \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} :\frac{2^{2k+1}|\hat{r}|^{2k}}{(2k+1)!}\exp(-|\hat{r}|^2)\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}: \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} :\frac{2|\hat{r}|^{2k}}{(2k+1)k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-|\hat{r}|^2)^j}{j!}: \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!(2j+1)} :|\hat{r}|^{2k}:。
\end{aligned}\tag{14.19}$$

用贝塔函数的表式:

$$\begin{aligned}B\left(k+1,\frac{1}{2}\right)&=2\int_0^1(1-t^2)^k\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\mathrm{d}t\sum_{j=0}^{k}\frac{k!(-1)^jt^{2j}}{j!(k-j)!}\\&=2\sum_{j=0}^{k}\frac{k!(-1)^j}{j!(k-j)!(2j+1)}\end{aligned}\tag{14.20}$$

及

$$B\left(k+1,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)},\tag{14.21}$$

可导出

$$\begin{aligned}\hat{r}^{-2}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}B\left(k+1,\frac{1}{2}\right):\hat{r}^{2k}:\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k+1}k!}{(2k+1)!}:\hat{r}^{2k}:。\end{aligned}\tag{14.22}$$

从(14.14)式看出，当 $n=2m-1$ 是奇数，$1-(-1)^{n+1-k}=1-(-1)^k\neq 0$，当且仅当 k 为奇数，以及 $1+(-1)^{n+1}\equiv 2$，故有

$$\begin{aligned}\hat{r}^{2m-1}&=\sum_{p=0}^{m-1}C_{2m}^{2p+1}:|\hat{r}|^{2m-2p-2}\int_0^{\infty}2r^{2p+1}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}\exp(-r^2):\\&\quad+2:\int_0^{|\hat{r}|}(r-|\hat{r}|)^{2m}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}|\hat{r}|}\exp(-r^2):\\&=\sum_{p=0}^{m-1}:C_{2m}^{2p+1}|\hat{r}|^{2m-2p-2}\frac{p!}{\sqrt{\pi}}:+2:\int_0^{|\hat{r}|}(r-|\hat{r}|)^{2m}\\&\quad\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}|\hat{r}|}\exp(-r^2):。\end{aligned}\tag{14.23}$$

把 $\exp(-r^2)$ 展开为无穷级数，可作积分

$$:\frac{2}{|\hat{r}|}\int_0^{|\hat{r}|}(r-|\hat{r}|)^{2m}\exp(-r^2)\mathrm{d}r:$$

$$=:\frac{2}{|\hat{r}|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{|\hat{r}|}(r-|\hat{r}|)^{2m}r^{2k}\mathrm{d}r:$$

$$=:\frac{2}{|\hat{r}|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}|\hat{r}|^{2m+2k+1}\int_0^{1}(r-1)^{2m}r^{2k}\mathrm{d}r:$$

$$=:\frac{2}{|\hat{r}|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}|\hat{r}|^{2m+2k+1}\mathrm{B}(2m+1,2k+1):$$

$$=2:\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2m)!(2k)!}{k!(2m+2k+1)!}|\hat{r}|^{2(m+k)}:,\qquad(14.24)$$

式中 $\mathrm{B}(2m+1,2k+1)$ 是贝塔函数。把(14.24)式代入(14.23)式,得

$$\hat{r}^{2m-1}=:\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2m)!(2k)!}{k!(2m+2k+1)!}|\hat{r}|^{2m+2k}:$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{m-1}:k!C_{2m}^{2k+1}|\hat{r}|^{2m-2k-2}:。\qquad(14.25)$$

例如,当 $m=1$,

$$\hat{r}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}+:\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{k!(2k+3)!}|\hat{r}|^{2k+2}:;\qquad(14.26)$$

当 $m=0$,

$$\hat{r}^{-1}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\pi}}:\frac{1}{|\hat{r}|}\{\exp[-(r-|\hat{r}|)^2]-\exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\}:$$

$$=:\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}|\hat{r}|^{2k}:。\qquad(14.27)$$

以上这些算符恒等式都靠 IWOP 技术才能导出。算符正规乘积的展开有利于其在相干态矩阵元方面的计算,预计会有新的用途。

14.2　径向动量算符的正规乘积展开[121]

狄拉克曾定义厄米特的径向动量算符是[1]

$$\hat{P}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right), \quad (14.28)$$
$$\hbar = 1,$$

式中 $r=(x^2+y^2+z^2)$。那么,怎样把 $\hat{P}_r$ 展开为正规乘积呢? 用坐标表象完备性,有:

$$\hat{P}_r = \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \hat{P}_r \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \hat{P}_r \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid + \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid \hat{P}_r\right)$$
$$= \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x}\left(-r+\sqrt{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}^{+}+\frac{1}{r}\right) \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid\right.$$
$$\left. - \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{x} \mid \left(-r+\sqrt{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}+\frac{1}{r}\right)\right]$$
$$= \pi^{-\frac{3}{2}} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} : \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P} \exp(-r^2+2r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2) : 。 \quad (14.29)$$

由于可将每一个矢量分解为纵向分量与横向分量,这种分解现在是相对于三维坐标矢量 $\boldsymbol{X}$ 而言的,故把 $\boldsymbol{n}$ 分解为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^2}\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{X}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{X}^2}。 \quad (14.30)$$

代入上式,得

$$\hat{P}_r = \pi^{-\frac{3}{2}} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} : \boldsymbol{n} \exp(-r^2+2r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2)\cdot\boldsymbol{P} :$$
$$= \pi^{-\frac{3}{2}} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} : \left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^2}\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{X}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{X}^2}\right]$$
$$\cdot \exp(-r^2+2r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2)\cdot\boldsymbol{P} : 。 \quad (14.31)$$

从对称性的角度考虑,可以判断上式中对横向分量的积分为零,故用(14.9)式可将(14.31)式写为

$$\hat{P}_r = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta : \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}$$
$$\cdot \exp(-r^2+2r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^2)\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2} :$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} r^2 \mathrm{d}r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u : u\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$$

$$\cdot \exp(-r^2 + 2ru\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2} - \boldsymbol{X}^2)\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r:\frac{1}{(2r)^2|\hat{r}|}(2ru|\hat{r}|-1)$$

$$\cdot\exp(-r^2+2ru|\hat{r}|-|\hat{r}|^2)\,|_{-1}^{1}\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:$$

$$=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}r\frac{1}{2|\hat{r}|}\{(2r|\hat{r}|-1)\exp[-(r-|\hat{r}|)^2]$$

$$-(-2r|\hat{r}|-1)\exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\}\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:$$

$$=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_0^\infty \mathrm{d}r\frac{1}{2|\hat{r}|}2r|\hat{r}|\{\exp[-(r-|\hat{r}|)^2]$$

$$+\exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\}-\int_0^\infty \mathrm{d}r\frac{1}{2|\hat{r}|}\{\exp[-(r-|\hat{r}|)^2]$$

$$-\exp[-(r+|\hat{r}|)^2]\}\Big)\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:\equiv W_1+W_2, \qquad (14.32)$$

式中第一个积分

$$W_1=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-|\hat{r}|}^\infty(r+|\hat{r}|)\mathrm{d}r\exp(-r^2)$$

$$+\int_{|\hat{r}|}^\infty(r-|\hat{r}|)\mathrm{d}r\exp(-r^2)\Big]\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:$$

$$=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\Big(\int_{-|\hat{r}|}^\infty+\int_{|\hat{r}|}^\infty\Big)r\mathrm{d}r\exp(-r^2)$$

$$+|\hat{r}|\Big(\int_{-|\hat{r}|}^\infty-\int_{|\hat{r}|}^\infty\Big)\mathrm{d}r\exp(-r^2)\Big]\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:$$

$$=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\exp(-|\hat{r}|^2)+2\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k|\hat{r}|^{2k+2}}{(2k+1)k!}\Big]\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:,$$

$$(14.33)$$

而第二个积分的计算相当于(14.27)式的计算，故有

$$\hat{P}_r = :\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[\exp(-|\hat{r}|^2) + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|\hat{r}|^{2k+2}}{(2k+1)k!}\right]\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}|\hat{r}|^{2k}\right\}\boldsymbol{X}\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{|\hat{r}|^2}:$$

$$= :\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k(-1)^{k-1}|\hat{r}|^{2k-2}}{(4k^2-1)k!\sqrt{\pi}}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}:$$

$$= :\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k|\hat{r}|^{2k}}{(4k^2+8k+3)k!\sqrt{\pi}}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{P}:。 \tag{14.34}$$

14.3　坐标算符的逆算符的正规乘积展开[122]~[125]

坐标算符的 n 次幂的正规乘积展开可以用(1.30)式与 IWOP 技术导出：

$$\hat{X}^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x| = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}x^n:\exp[-(x-\hat{X})^2]:$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2l}:\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^{n-2l}:\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right), \tag{14.35}$$

式中 $\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{-l}(2l-1)!!$，还用到数学公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp[-\sigma(x-\lambda)^2]x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^{n+1}}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}(\sigma^{\frac{1}{2}}\lambda)^{n-2k}, \tag{14.36}$$

式中 $\mathrm{Re}\sigma>0$。一个有趣的但却令人初看望而却步的问题是：什么是$\frac{1}{\hat{X}^n}$的正规乘积展开呢？以往的不少文献中曾指出：由于在动量

本征态$\langle p|$表象内$\hat{X}$的表示为一个微商运算，$\langle p|\hat{X}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\langle p|$，因此，可以将$\frac{1}{\hat{X}}$想像为微分的逆运算，即积分

$$\frac{1}{\hat{X}}=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{p}\mathrm{d}p',\quad \hbar=1。\tag{14.37}$$

至于$\frac{1}{\hat{X}}$的正规乘积展开是什么？则未见有文献报道过。以下尝试用 IWOP 技术来解决此问题。由坐标表象的完备性，知

$$\frac{1}{\hat{X}}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{1}{x}\mid x\rangle\langle x\mid \tag{14.38}$$

在$x=0$处有极点，因此定义柯西主值积分

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{X}}=\lim_{A\to\infty,\epsilon\to+0}&:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{-\epsilon}\mathrm{d}x\,\frac{\exp[-(x-\hat{X})^2]}{x}\\&+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\epsilon}^{A}\mathrm{d}x\,\frac{\exp[-(x-\hat{X})^2]}{x}:。\end{aligned}\tag{14.39}$$

在上式第一项中令$x=-t$，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{X}}&=:\lim_{A\to\infty,\epsilon\to+0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{A}^{\epsilon}\mathrm{d}t\,\frac{\exp[-(t+\hat{X})^2]}{t}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\epsilon}^{A}\mathrm{d}x\,\frac{\exp[-(x-\hat{X})^2]}{x}:\\&=\lim_{A\to\infty,\epsilon\to+0}:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\epsilon}^{A}\mathrm{d}x\,\frac{-\exp[-(x+\hat{X})^2]+\exp[-(x-\hat{X})^2]}{x}:\\&=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\exp(-x^2)\,\frac{\exp(2x\hat{X})-\exp(-2x\hat{X})}{x}\exp(-\hat{X}^2):。\end{aligned}\tag{14.40}$$

此积分在$x=0$及$x\to+\infty$处都是收敛的。用数学公式

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-t}t^{\nu-1}=\Gamma(\nu),\tag{14.41}$$

式中 $\mathrm{Re}(\nu)>0$。可将(14.40)式积分为

$$\frac{1}{\hat{X}}=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+1)!}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\exp(-x^2)x^{2k}\hat{X}^{2k+1}\exp(-\hat{X}^2):$$

$$=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-t}t^{k-\frac{1}{2}}\right)\hat{X}^{2k+1}\exp(-\hat{X}^2):$$

$$=:\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\hat{X}^{2k+1}\exp(-\hat{X}^2):,\qquad(14.42)$$

式中 $\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{-k}(2k-1)!!$。再用组合公式(其证明见(14.60)式后)：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{k+x}(-1)^k\binom{n}{k}=\frac{1}{\binom{n+x}{n}},\qquad(14.43)$$

式中

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\qquad(14.44)$$

可以把(14.42)式化为简捷的表达式：

$$\frac{1}{\hat{X}}=:\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)k!}\hat{X}^{2k+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\hat{X}^{2m}}{m!}:$$

$$=:\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-1)^{n-k}}{(2k+1)k!(n-k)!}\hat{X}^{2n+1}:$$

$$=:2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}(-1)^k\binom{n}{k}\right]\frac{(-1)^n}{n!}\hat{X}^{2n+1}:$$

$$=:2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+\frac{1}{2}}{n}}\frac{(-1)^n}{n!}\hat{X}^{2n+1}:,\qquad(14.45)$$

或可把(14.45)式重写为

$$\frac{1}{\hat{X}} = :2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}}\hat{X}^{2n+1}:$$

$$= :\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\hat{X}^{2n+1}:。\qquad(14.46)$$

为了验证(14.46)式的正确性，在(14.46)式两边乘上 $\hat{X}=\frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}$，得到

$$\begin{aligned}\hat{X}\frac{1}{\hat{X}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}[a:(a+a^{\dagger})^{2n+1}:+:a^{\dagger}(a+a^{\dagger})^{2n+1}:] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}[:(a+a^{\dagger})^{2n+2}:+:(2n+1)(a^{\dagger}+a)^{2n}:] \\ &= :\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}(a+a^{\dagger})^{2n+2}: \\ &\quad +:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}(a^{\dagger}+a)^{2n}:+1 \\ &= 1,\end{aligned}\qquad(14.47)$$

可见以上推导无误。为了进一步求$\frac{1}{\hat{X}^n}$的正规乘积展开，注意到存在以下恒等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}:\hat{X}^n: = :\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\hat{X}^n:。\qquad(14.48)$$

为了证明上式，回忆数学公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}\exp[-(x-y)^2]\mathrm{H}_n(x) = (2y)^n,\qquad(14.49)$$

式中 H_n 是单变量厄米特多项式，其定义是

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}。\qquad(14.50)$$

由(1.30)式及(14.49)式可导出[126]：

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(\hat{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mid x\rangle\langle x \mid \mathrm{H}_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} : \exp[-(x-\hat{X})^2]\mathrm{H}_n(x) : \\ &= 2^n : \hat{X}^n : 。\end{aligned} \tag{14.51}$$

把它与 $\mathrm{H}_n(x)$ 的递推性质

$$\mathrm{H}_n'(x) = 2n\mathrm{H}_{n-1}(x) \tag{14.52}$$

相比较，可见

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}} : \hat{X}^n : &= 2^{-n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}} \mathrm{H}_n(\hat{X}) = n2^{1-n}\mathrm{H}_{n-1}(\hat{X}) \\ &= n : \hat{X}^{n-1} : = : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}} \hat{X}^n : 。\end{aligned} \tag{14.53}$$

所以，在正规乘积外的微商运算可以进入：　：内部进行。由(14.46)式导出 $\frac{1}{\hat{X}^n}$ 的正规乘积展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{X}^n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^{n-1}\frac{1}{\hat{X}} \\ &= \sqrt{\pi}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} : \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^{n-1}\hat{X}^{2m+1} : \\ &= \sqrt{\pi}(-1)^{n-1} : \sum_{m=\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\binom{2m+1}{n-1}\hat{X}^{2m-n+2} : \\ &= \sqrt{\pi}(-1)^n : \sum_{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\binom{2m-1}{n-1}\hat{X}^{2m-n} : 。\end{aligned} \tag{14.54}$$

读者可以将它与 $\hat{X}^n$ 的正规展开式(见第一章习题 7)作一比较。

特别当 $n=2$ 时，

$$\frac{1}{\hat{X}^2}=\sqrt{\pi}:\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(2m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\hat{X}^{2m}:。\tag{14.55}$$

作为上述讨论的应用，考虑一个谐振子受到微扰 $\frac{\lambda}{x}$，λ 是足够小的微扰参量，哈密顿量为

$$H=\frac{P^2}{2}+\frac{1}{2}\hat{X}^2+\lambda\frac{1}{\hat{X}}。\tag{14.56}$$

当未受扰动的态是相干态 $|z\rangle$ 时，从(14.46)式立即得到

$$\langle z|\frac{1}{\hat{X}}|z\rangle=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}(z+z^*)^{2n+1}。\tag{14.57}$$

也可算出 $\frac{1}{\hat{X}}$ 在粒子态表象的矩阵元：

$$\langle n'|\frac{1}{\hat{X}}|n\rangle=\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\langle n'|:\hat{X}^{2m+1}:|n\rangle$$

$$=\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)2^{m+\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}$$

$$\cdot\langle n'|a^{\dagger k}a^{2m-k+1}|n\rangle$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{|n-n'|-1}{2}}}{2^{\frac{|n-n'|}{2}}}\sqrt{\pi n!n'!}\displaystyle\sum_{m=0}^{\min(n,n')}\frac{(-1)^m}{2m\Gamma\left(m+\frac{|n-n'|}{2}+1\right)}\\ \cdot\dbinom{2m+|n-n'|}{m+\frac{n'-n+|n-n'|}{2}}\dfrac{1}{[\min(n,n')-m]!},\quad n'-n\text{ 为奇数，}\\ 0,\qquad n'-n\text{ 为非奇数。}\end{cases}\tag{14.58}$$

把以上讨论推广到动量表象，则可以导出动量算符的逆算符的正规乘积展开：

$$\frac{1}{\hat{P}}=:2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\begin{pmatrix}n+\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}}\frac{(-1)^n}{n!}\hat{P}^{2n+1}:。\tag{14.59}$$

从以上分析看出，如果没有 IWOP 技术，这类公式几乎是不可能导出的。

以下用数学归纳法来证明(14.43)式。令

$$T_n\equiv\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{k+x}(-1)^k\binom{n}{k},\tag{14.60}$$

显然 $T_0=1$，

$$\begin{aligned}T_n&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k+x}(-1)^k\binom{n}{k}\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x}{k+x}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]+(-1)^n\frac{x}{n+x}\\&=T_{n-1}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k}{k+x}\\&=T_{n-1}+\frac{x}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x}{k+x}\right]\\&=T_{n-1}-\frac{x}{n}T_n。\end{aligned}\tag{14.61}$$

因此，

$$\begin{aligned}T_n&=\frac{n}{n+x}T_{n-1}=\frac{n}{n+x}\frac{n-1}{n+x-1}T_{n-2}\\&=\cdots=\frac{n!}{(n+x)(n+x-1)\cdots(x+1)}T_0\\&=\frac{1}{\binom{n+x}{n}}。\end{aligned}\tag{14.62}$$

14.4　用 IWOP 技术实现量子力学意义下的 Hilbert 变换

可以把上节的计算与数学中的 Hilbert 变换联系起来进行思考。后者的定义是

$$g(y) = H[f(x)] = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-y}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+y)}{x}\mathrm{d}x, \quad (14.63)$$

其逆变换是

$$f(x) = H^{-1}[g(y)] = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(y)}{y-x}\mathrm{d}y, \quad (14.64)$$

式中 P 表示柯西主值积分。据此，就可将上述$\frac{1}{\hat{X}}$的正规乘积展开式：

$$\frac{1}{\hat{X}} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{1}{\sqrt{\pi}x}:\exp[-(x-\hat{X})^2]: \quad (14.65)$$

视为是在正规乘积内部进行的 Hilbert 变换，所以就可用上有关 Hilbert 变换的已知知识。作为一个习题，有兴趣的读者可以求$\frac{1}{\hat{X}-\lambda}$的正规乘积展开，$\lambda$ 是一个实数。

总之，有了有序算符内的积分技术，就可以对狄拉克符号系统内的算符实现积分运算。符号及其运算规则是相辅相成的，运算规则使符号更实用，这正如当阿拉伯数字发明后，人们从加、减、乘和除法发展为乘方、开方……以致于微积分运算。对于量子力学的符号(其大多数是算符)，自然需要发展一套有关算符的积分规则，从而能帮助我们找到许多新的幺正变换算符，建立新的量子力学表象并证明其完备性，建立许多新的物理态，从而使得物理理论

更上一层楼，更加丰富与深入。

14.5　两体一维库仑势的正规乘积展开[124]

对于两体一维库仑势$\frac{1}{X_1-X_2}$，用纠缠态表象及 IWOP 技术来求其正规乘积展开，最为方便。由本征方程(2.9)及$|\eta\rangle$表象的完备性，得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{X_1-X_2} &= \int \frac{d^2\eta}{\pi}\frac{1}{X_1-X_2}\,|\eta\rangle\langle\eta| = \int\frac{d^2\eta}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{\eta_1}\,|\eta\rangle\langle\eta| \\
&= \int\frac{d^2\eta}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{\eta_1} : \exp\{-[\eta-(a_1-a_2^\dagger)][\eta^*-(a_1^\dagger-a_2)]\} : \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 : \frac{1}{\eta_1}\exp[-\eta_1^2+\sqrt{2}\eta_1(X_1-X_2)] \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \exp[-\eta_2^2+\sqrt{2}\eta_2(P_1+P_2)] \\
&\quad \cdot \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2 - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) : 。
\end{aligned}
\tag{14.66}
$$

对 η_2积分后得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{X_1-X_2} &= : \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} d\eta_1 \exp(-\eta_1^2) \\
&\quad \cdot \frac{\exp[\sqrt{2}\eta_1(X_1-X_2)]-\exp[-\sqrt{2}\eta_1(X_1-X_2)]}{\eta_1} \\
&\quad \cdot \exp\left[-\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\right] : 。
\end{aligned}
\tag{14.67}
$$

对 η_1的积分可用主值积分，即

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{X_1-X_2} = : \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} d\eta_1 \exp(-\eta_1^2)\,\frac{2^{k+\frac{3}{2}}\eta_1^{2k}}{(2k+1)!} \\
\cdot (X_1-X_2)^{2k+1}\exp\left[-\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\right] :
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=:\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+\frac{1}{2}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k+1)!}(X_1-X_2)^{2k+1}\\
&\quad\cdot\exp\left[-\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\right]:\\
&=:\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)!}(X_1-X_2)^{2k+1}\\
&\quad\cdot\exp\left[-\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\right]:\\
&=:\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^k k!}(X_1-X_2)^{2k+1}\\
&\quad\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(X_1-X_2)^{2m}}{2^m}:\\
&=:\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)2^n k!(n-k)!}(X_1-X_2)^{2n+1}:\\
&=:\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{(2k+1)}\right]\frac{(-1)^n}{2^n n!}(X_1-X_2)^{2n+1}:\\
&=:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+\frac{1}{2}}{n}}\frac{(-1)^n}{2^n n!}(X_1-X_2)^{2n+1}:\\
&=:\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)2^{n+1}}(X_1-X_2)^{2n+1}:,
\end{aligned}
\tag{14.68}
$$

推导中用到了(14.43)式。注意到

$$
\begin{aligned}
a:f(a^\dagger,a):&=:f(a^\dagger,a):a+[a,:f(a^\dagger,a):]\\
&=:af(a^\dagger,a):+:\frac{\partial f}{\partial a^\dagger}:,
\end{aligned}
\tag{14.69}
$$

就可以验证(14.68)式的正确性,即计算

$$
\begin{aligned}
&(X_1 - X_2)\frac{1}{X_1 - X_2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + a_1):\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)2^{n+1}}(X_1 - X_2)^{2n+1}:\\
&\quad-\frac{1}{\sqrt{2}}(a_2^\dagger + a_2):\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)2^{n+1}}(X_1 - X_2)^{2n+1}:\\
&=1。
\end{aligned}
\tag{14.70}
$$

这作为习题留给有兴趣的读者。

14.6　三维库仑势及其他三维位势的正规乘积展开[125]

本节将把上述讨论推广到三维，求物理上常见的三维库仑势的正规乘积展开。记$|\eta_1\rangle$为两个粒子的相对坐标$R_{\alpha1}-R_{\beta1}$与总动量$P_{\alpha1}+P_{\beta1}$的共同本征态，从本节起下标α,β分别代表两个粒子，下标$i,j=1,2,3$代表坐标或动量的分量，因此，

$$
|\eta_1\rangle = \exp\left(-\frac{|\eta_1|^2}{2} + \eta_1 a_{\alpha1}^\dagger - \eta_1^* a_{\beta1}^\dagger + a_{\alpha1}^\dagger a_{\beta1}^\dagger\right)|0,0\rangle,
\tag{14.71}
$$

式中$\eta_1=\eta_{1x}+\mathrm{i}\eta_{1y}$是复数，$a_{\alpha1}|0,0\rangle=0=a_{\beta1}|0,0\rangle$，$\eta_1$的实部和虚部分别是$R_{\alpha1}-R_{\beta1}$和$P_{\alpha1}+P_{\beta1}$的本征值：

$$
\begin{aligned}
(R_{\alpha1}-R_{\beta1})|\eta_1\rangle &= \sqrt{2}\eta_{1x}|\eta_1\rangle,\\
(P_{\alpha1}+P_{\beta1})|\eta_1\rangle &= \sqrt{2}\eta_{1y}|\eta_1\rangle,
\end{aligned}
\tag{14.72}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\alpha i} + a_{\alpha i}^\dagger),\\
P_{\alpha i} &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}(a_{\alpha i} - a_{\alpha i}^\dagger)。
\end{aligned}
\tag{14.73}
$$

于是两粒子的三维纠缠态$|\boldsymbol{\eta}\rangle$为

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\eta}\rangle &= |\eta_1,\eta_2,\eta_3\rangle \\
&= \exp\left[\sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{|\eta_i|^2}{2}+\eta_i a_{\alpha i}^{\dagger}-\eta_i^* a_{\beta i}^{\dagger}+a_{\alpha i}^{\dagger}a_{\beta i}^{\dagger}\right)\right]|\mathbf{0}_\alpha,\mathbf{0}_\beta\rangle,
\end{aligned}
\tag{14.74}
$$

$$
\begin{gathered}
(R_{\alpha i}-R_{\beta i})|\boldsymbol{\eta}\rangle=\sqrt{2}\eta_{ix}|\boldsymbol{\eta}\rangle, \\
\eta_{ix}+\mathrm{i}\eta_{iy}=\eta_i。
\end{gathered}
\tag{14.75}
$$

现考虑$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k(k\geqslant-2)$的正规乘积展开。由于

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k|\boldsymbol{\eta}\rangle &= \left[\sum_{i=1}^{3}(R_{\alpha i}-R_{\beta i})^2\right]^{\frac{k}{2}}|\boldsymbol{\eta}\rangle \\
&= 2^{\frac{k}{2}}\left(\sqrt{\eta_{1x}^2+\eta_{2x}^2+\eta_{3x}^2}\right)^k|\boldsymbol{\eta}\rangle,
\end{aligned}
\tag{14.76}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k &= 2^{\frac{k}{2}}\int\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}}{\pi^3}\left(\sqrt{\eta_{1x}^2+\eta_{2x}^2+\eta_{3x}^2}\right)^k \\
&\quad\cdot\exp\left[\sum_{i=1}^{3}(-|\eta_i|^2+\eta_i a_{\alpha i}^{\dagger}-\eta_i^* a_{\beta i}^{\dagger}+a_{\alpha i}^{\dagger}a_{\beta i}^{\dagger})\right] \\
&\quad\cdot|\mathbf{0}_\alpha,\mathbf{0}_\beta\rangle\langle\mathbf{0}_\alpha,\mathbf{0}_\beta|\exp\left[\sum_{i=1}^{3}(\eta_i^* a_{\alpha i}-\eta_i a_{\beta i}+a_{\alpha i}a_{\beta i})\right] \\
&= 2^{\frac{k}{2}}:\int\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}}{\pi^3}\left(\sqrt{\eta_{1x}^2+\eta_{2x}^2+\eta_{3x}^2}\right)^k \\
&\quad\cdot\exp\left[\sum_{i=1}^{3}(-|\eta_i|^2+\eta_i a_{\alpha i}^{\dagger}-\eta_i^* a_{\beta i}^{\dagger}+\eta_i^* a_{\alpha i}\right. \\
&\quad\left.-\eta_i a_{\beta i}+a_{\alpha i}a_{\beta i}+a_{\alpha i}^{\dagger}a_{\beta i}^{\dagger}-a_{\alpha i}^{\dagger}a_{\alpha i}-a_{\beta i}^{\dagger}a_{\beta i})\right]: \\
&= 2^{\frac{k}{2}}:\int\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\eta}}{\pi^3}\left(\sqrt{\eta_{1x}^2+\eta_{2x}^2+\eta_{3x}^2}\right)^k \\
&\quad\cdot\exp\left[-\sum_{i=1}^{3}\left(\eta_{ix}-\frac{R_{\alpha i}-R_{\beta i}}{\sqrt{2}}\right)^2-\sum_{i=1}^{3}\left(\eta_{iy}-\frac{P_{\alpha i}+P_{\beta i}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]: \\
&= 2^{\frac{k}{2}}:\int\frac{\mathrm{d}\eta_{1x}\mathrm{d}\eta_{2x}\mathrm{d}\eta_{3x}}{\sqrt{\pi^3}}\left(\sqrt{\eta_{1x}^2+\eta_{2x}^2+\eta_{3x}^2}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$\cdot \exp\left[-\sum_{i=1}^{3}\left(\eta_{ix}-\frac{R_{\alpha i}-R_{\beta i}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:$$

$$= 2^{\frac{k}{2}} :\int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{\pi}^3} r^k \exp\left[-r^2+\sqrt{2}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right]:, \tag{14.77}$$

在最后一步计算中，已令

$$\eta_{1x}\to u,\eta_{2x}\to v,\eta_{3x}\to w,$$
$$\boldsymbol{r}=(u,v,w),\quad r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{u^2+v^2+w^2}。 \tag{14.78}$$

现把(u,v,w)坐标系转到(u',v',w')坐标系，使w'轴与$(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)$的方向一致，以至于

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)=w'\mid\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta\mid=w'\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(R_{\alpha i}-R_{\beta i})^2}, \tag{14.79}$$

$$r=r'=\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}。 \tag{14.80}$$

再令

$$u'=r'\sin\theta\cos\varphi,\quad v'=r'\sin\theta\sin\varphi,\quad w'=r'\cos\theta, \tag{14.81}$$

则(14.78)式变为

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k=:\frac{1}{\sqrt{\pi}^3}2^{\frac{k}{2}}\int_0^\infty r'^{(k+2)}\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$\cdot\exp\left[-r'^2+\sqrt{2}r'\cos\theta\,|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right]:。 \tag{14.82}$$

用泊松积分公式：

$$\mathrm{J}_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\exp(\mathrm{i}z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\mathrm{d}\theta, \tag{14.83}$$

式中 $\mathrm{Re}(\nu)>-\frac{1}{2}$，$\mathrm{J}_\nu(z)$是贝塞尔函数，$z$ 与 ν 是复数。对

(14.82)式中的 $d\theta$ 积分,得

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k=:\frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{\sqrt{-\mathrm{i}2^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|}}\int_0^\infty r'^{\left(k+\frac{3}{2}\right)}\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(-\mathrm{i}\sqrt{2}|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|r')$$

$$\cdot\exp\left[-r'^2-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right]:。\tag{14.84}$$

进一步用数学公式,得

$$\int_0^\infty x^\mu\exp(-\lambda x^2)\mathrm{J}_\nu(tx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{t^\nu\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\lambda^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}\Gamma(\nu+1)}\mathrm{F}\left(\frac{\mu+\nu+1}{2};\nu+1;-\frac{t^2}{4\lambda}\right),\tag{14.85}$$

式中 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$,F 是合流超几何函数:

$$\mathrm{F}(\sigma;\gamma;z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\sigma)_l}{j!(\gamma)_l}z^l,$$

$$(\sigma)_0=1,\cdots,(\sigma)_n=\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+n-1)$$

$$=\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)},\tag{14.86}$$

式中 $n\geqslant1$。对(14.84)式中的 $\mathrm{d}r'$ 积分$\Big($用(14.85)式时,取 $\mu=k+\frac{3}{2},\nu=\frac{1}{2},\lambda=1,t=-\mathrm{i}\sqrt{2}|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|\Big)$,得到

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k=:\frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\mathrm{F}\left(\frac{k+3}{2};\frac{3}{2};\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right)$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right]:。\tag{14.87}$$

再用库米第一公式:

$$\mathrm{e}^{-z}\mathrm{F}(\sigma;\gamma;z)=\mathrm{F}(\gamma-\sigma;\gamma;-z)\tag{14.88}$$

化简(14.87)式,得

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^k=:\frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\mathrm{F}\left(-\frac{k}{2};\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):$$

$$=\frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}:\mathrm{F}\left[-\frac{k}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\cdot(a_{\alpha i}+a_{\alpha i}^\dagger-a_{\beta i}-a_{\beta i}^\dagger)^2\right]:。\tag{14.89}$$

特别当 $k=-2,-1,1,2,3,4$ 时,得

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^{-2}=:\mathrm{F}\left(1;\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):=:\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^{2l}}{(2l+1)!}:,$$

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^{-1}=:\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{F}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):,$$

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}:\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):,\tag{14.90}$$

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^2=:3\mathrm{F}\left(-1;\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):$$

$$=3+:(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2:,$$

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^3=\frac{2^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{F}\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):,$$

$$|\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta|^4=\frac{2^2\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}:\mathrm{F}\left(-2;\frac{3}{2};-\frac{(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2}{2}\right):$$

$$=15+:10(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^2:+:(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)^4:。$$

从 $k=2,4$ 可以验算出其正确性。$k=-1$ 时就是库仑势的正规乘积展开。

作为其一个应用,可以考虑当两个谐振子处于其真空态时,突然在这两个振动粒子上分别加上正负电荷,则马上产生一个库仑势,用(14.90)式就可以计算出对原先基态的能级修正。

14.7　用 IWOP 技术导出与组合学有关的若干算符恒等式[127],[128]

前面曾经用 IWOP 技术简捷地推导过公式：

$$\exp(\lambda a^{\dagger} a) = :\exp[(e^{\lambda}-1)a^{\dagger} a]:。\qquad (14.91)$$

以下用推导上式类似的步骤求 $\exp(\lambda a^{\dagger r} a)$ 的正规乘积展开。注意到

$$\begin{aligned}\exp(\lambda a^{\dagger r} a)a^{\dagger}\exp(-\lambda a^{\dagger r} a) &= a^{\dagger} + \lambda a^{\dagger r} + \frac{1}{2!}\lambda^2 r a^{\dagger(2r-1)} \\ &\quad + \frac{1}{3!}\lambda^3 r(2r-1)a^{\dagger(3r-2)} + \cdots \\ &= a^{\dagger}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left\{\prod_{m=0}^{n-1}[1+m(r-1)]\right\}a^{\dagger n(r-1)},\end{aligned}$$

$$(14.92)$$

以及

$$\exp(\lambda a^{\dagger r} a)\,|\,0\rangle = |\,0\rangle,$$

用相干态完备性与 IWOP 技术，立刻导出

$$\begin{aligned}\exp(\lambda a^{\dagger r} a) &= \int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda a^{\dagger r} a)\,|\,z\rangle\langle z\,| \\ &= \int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda a^{\dagger r} a)\exp\left(-\frac{|\,z\,|^2}{2}+z a^{\dagger}\right) \\ &\quad \cdot \exp(-\lambda a^{\dagger r} a)\,|\,0\rangle\langle z\,| \\ &= :\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp\left(-|\,z\,|^2 + z a^{\dagger}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left\{\prod_{m=0}^{n-1}[1+m(r-1)]\right\}\right. \\ &\quad \left.\cdot\, a^{\dagger n(r-1)} + z^* a - a^{\dagger} a\right): \\ &= :\exp\left(a^{\dagger}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left\{\prod_{m=0}^{n-1}[1+m(r-1)]\right\}a^{\dagger n(r-1)} a\right):。\end{aligned}$$

$$(14.93)$$

应用数学恒等式：

$$[1-\chi(r-1)]^{-\frac{1}{r-1}}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi^n}{n!}\prod_{m=0}^{n-1}[1+m(r-1)],$$

(14.94)

它实际上是一种泰勒展开，

$$f(\chi)\equiv[1-\chi(r-1)]^{-\frac{1}{r-1}}-1=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi^n}{n!}f^n(0),$$

(14.95)

例如：$f(0)=0$，

$$f'(0)=[1-\chi(r-1)]^{-\frac{r}{r-1}}\Big|_{\chi=0}=1,$$

$$f''(0)=r[1-\chi(r-1)]^{-\frac{2r-1}{r-1}}\Big|_{\chi=0}=r,$$

$$f'''(0)=r(2r-1)[1-\chi(r-1)]^{-\frac{3r-2}{r-1}}\Big|_{\chi=0}=r(2r-1),$$

……

以及

$$f^n(0)=\prod_{m=0}^{n-1}[1+m(r-1)][1-\chi(r-1)]^{-\frac{1+n(r-1)}{r-1}}\Big|_{\chi=0}$$

$$=\prod_{m=0}^{n-1}[1+m(r-1)],$$

就可在形式上将(14.93)式记为

$$\exp(\lambda a^{\dagger r}a)=:\exp(a^{\dagger}\{[1-\lambda a^{\dagger(r-1)}(r-1)]^{-\frac{1}{r-1}}-1\}a):。$$

(14.96)

从(14.96)式可看出，当$r\to1$时，它就是(14.91)式，由此导出

$$(a^{\dagger}a)^k=\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k\exp(\lambda a^{\dagger}a)\Big|_{\lambda=0}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k:\sum_{m=0}^{\infty}(e^{\lambda}-1)^m\frac{(a^{\dagger}a)^m}{m!}:\Big|_{\lambda=0}。\quad(14.97)$$

由于

$$(e^{\lambda}-1)^m=\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots\right)^m$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_n=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}\frac{\lambda^n}{n!},\quad(14.98)$$

可记

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_n=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}=m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}。\quad(14.99)$$

它相当于把 n 本书分放在 m 个非空的盒子中的分法的数目。把(14.98)式与

$$(e^{\lambda}-1)^m=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}e^{\lambda i}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}i^n\right]\frac{\lambda^n}{n!}\quad(14.100)$$

相比较，可知

$$\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}i^n,\quad(14.101)$$

它们恰为组合学中常用的第二类 Stiring 数。所以

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k(e^{\lambda}-1)^m\bigg|_{\lambda=0}=\sum_{l=m}^{\infty}m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}\frac{1}{n!}\delta_{k,n}k!=m!\left\{\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right\}。$$

$$(14.102)$$

把(14.102)式代入(14.97)式，得算符恒等式：

$$N^k=(a^{\dagger}a)^k=\sum_{m=0}^{k}\left\{\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right\}a^{\dagger m}a^m。\quad(14.103)$$

另一方面，由于

$$N(N-1)\cdots(N-k+1)=N(N-1)\cdots(N-k+1)\sum_{m}^{\infty}|m\rangle\langle m|$$

$$=:\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)\cdots(m-k+1)\frac{(a^{\dagger}a)^m}{m!}$$

$$\cdot\exp(-a^{\dagger}a):$$

$$= :\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a^{\dagger}a)^{m}}{(m-k)!}\exp(-a^{\dagger}a): $$
$$= a^{\dagger k}a^{k}, \tag{14.104}$$

所以(14.103)式又为

$$N^{k} = \sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}N(N-1)\cdots(N-m+1)。 \tag{14.105}$$

这在形式上与数 s 的 k 次幂 s^{k} 用渐降因子分解的表达式：

$$s^{k} = \sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}s(s-1)\cdots(s-m+1) \tag{14.106}$$

相同，而此展开系数即为第二类 Stirling 数。用(14.103)式计算其相干态平均：

$$\langle z \mid N^{k} \mid z\rangle = \sum_{n=0}^{k}\begin{Bmatrix}k\\n\end{Bmatrix}\mid z\mid^{2n} \equiv B_{k}(\mid z\mid^{2}), \tag{14.107}$$

$B_{k}(|z|^{2})$恰是 Bell 多项式。另一方面，应用

$$N^{k} = \sum_{n=0}^{\infty}n^{k}\mid n\rangle\langle n\mid = :\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}a^{\dagger n}a^{n}\exp(-a^{\dagger}a):, \tag{14.108}$$

又可算得

$$\langle z \mid N^{k} \mid z\rangle = \exp(-\mid z\mid^{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}\mid z\mid^{2n}。 \tag{14.109}$$

比较(14.107)式和(14.109)式，可导出 Bell 数的表达式(这在组合学中常见)：

$$B_{k}(\mid z\mid^{2}=1) = \sum_{n=0}^{k}\begin{Bmatrix}k\\n\end{Bmatrix} = \mathrm{e}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}。 \tag{14.110}$$

以上讨论表明用玻色算符代数关系可以方便地导出若干组合学中的有用关系。进一步可求$(aa^{\dagger})^{k}$的反正规乘积展开，用其生成算符 $\exp(\lambda aa^{\dagger})$的反正规乘积形式：

$$\exp(\lambda aa^{\dagger}) = \mathrm{e}^{\lambda}\exp(\lambda a^{\dagger}a)$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\lambda} \vdots \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle -\beta | \exp(-\lambda a^{\dagger} a) | \beta \rangle \\
&\quad \cdot \exp(|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^{\dagger} + a a^{\dagger}) \vdots \\
&= e^{\lambda} \vdots \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp(-e^{\lambda} |\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^{\dagger} + a a^{\dagger}) \vdots \\
&= \vdots \exp[(1 - e^{-\lambda}) a a^{\dagger}] \vdots \\
&= \vdots \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda})^n \frac{(a^{\dagger} a)^m}{n!} \vdots 。
\end{aligned} \tag{14.111}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
(1 - e^{-\lambda})^n &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} e^{-m\lambda} \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^{n-v} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^v \frac{\lambda^v}{v!} \\
&= n! \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^{n-v} \left\{ \begin{matrix} v \\ n \end{matrix} \right\} \frac{\lambda^v}{v!},
\end{aligned} \tag{14.112}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
(a a^{\dagger})^k &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k \vdots \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^{n-v} \left\{ \begin{matrix} v \\ n \end{matrix} \right\} \frac{\lambda^v}{v!} (a a^{\dagger})^n \vdots \Big|_{\lambda=0} \\
&= \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k-n} \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} a^n a^{\dagger n},
\end{aligned} \tag{14.113}
$$

这就是$(aa^{\dagger})^k$的反正规乘积展开。请读者注意它与(14.103)式的区别，例如当$k=4$，几个 Stiring 数为

$$
\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 6, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 1,
$$

所以

$$
(a a^{\dagger})^4 = - a a^{\dagger} + 7 a^2 a^{\dagger 2} - 6 a^3 a^{\dagger 3} + a^4 a^{\dagger 4} 。
$$

另一方面，由于$a|m\rangle = \sqrt{m}|m-1\rangle$，故有

$$
a^n a^{\dagger n} = \sum_{m=0}^{\infty} a^n | m \rangle \langle m | a^{\dagger n}
$$

$$= :\sum_{m=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)\frac{(a^{\dagger}a)^m}{m!}\exp(-a^{\dagger}a):$$

$$=(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1), \tag{14.114}$$

所以

$$(aa^{\dagger})^k=\sum_{n=0}^{k}(-1)^{k-n}\begin{Bmatrix}k\\n\end{Bmatrix}(N+n)(N+n-1)\cdots(N+1)。 \tag{14.115}$$

也可求得 N^k 的反正规乘积展开：

$$N^k = \vdots\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta|\sum_{n=0}^{k}\begin{Bmatrix}k\\n\end{Bmatrix}a^{\dagger n}a^n|\beta\rangle$$

$$\cdot\exp(|\beta|^2+\beta^*a-\beta a^{\dagger}+aa^{\dagger})\vdots$$

$$=\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\begin{Bmatrix}k\\n\end{Bmatrix}\vdots\sum_{l=0}^{n}\frac{n!n!}{l!(n-l)!(n-l)!}a^{n-l}(a^{\dagger})^{n-l}\vdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\begin{Bmatrix}k\\n\end{Bmatrix}\vdots\mathrm{H}_{n,n}(a^{\dagger},a)\vdots, \tag{14.116}$$

式中 $\mathrm{H}_{n,n}$是双模厄米特多项式。

14.8 用 IWOP 技术导出有关厄米特多项式的算符公式

由积分公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-\sigma(x-y)^2}x^n=\frac{1}{\sqrt{\sigma^{n+1}}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}(\sigma^{\frac{1}{2}}y)^{n-2k}$$

及 IWOP 技术，得正规乘积展开：

$$\hat{X}^n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx:\exp[-(x-\hat{X})^2]x^n:$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}:\hat{X}^{n-2k}:。$$

再用(14.51)式看出

$$\hat{X}^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{2^n k!(n-2k)!}\mathrm{H}_{n-2k}(\hat{X}),\tag{14.117}$$

以及用(14.50)式看出

$$\hat{X}^n=(2\mathrm{i})^{-n}:\mathrm{H}_n(\mathrm{i}\hat{X}):,\tag{14.118}$$

这表明存在以下积分公式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp[-(x-y)^2]x^n=(2\mathrm{i})^{-n}\mathrm{H}_n(\mathrm{i}y)。\tag{14.119}$$

把(14.51)式推广到双模情形,可得恒等式

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}_1+\hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{H}_n\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)\\&\quad\cdot:\exp[-(x_1-\hat{X}_1)^2-(x_2-\hat{X}_2)^2]:\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_2\,\mathrm{H}_n(y_1)\\&\quad\cdot:\exp\left[-\left(y_1-\frac{\hat{X}_1+\hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(y_2-\frac{\hat{X}_1-\hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:\\&=2^{\frac{n}{2}}:(\hat{X}_1+\hat{X}_2)^n:。\end{aligned}\tag{14.120}$$

由此又导出

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}t)^n}{n!}\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}_1+\hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{n!}:(\hat{X}_1+\hat{X}_2)^n:\\&=:\exp[2t(\hat{X}_1+\hat{X}_2)]:\\&=\exp[2t(\hat{X}_1+\hat{X}_2)-2t^2]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^n}{k!(n-k!)}\mathrm{H}_k(\hat{X}_1)\mathrm{H}_{n-k}(\hat{X}_2)。\end{aligned}\tag{14.121}$$

比较两边 t^n 的系数,得到迭加公式:

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{-\frac{n}{2}}n!}{k!(n-k)!}\mathrm{H}_k(x_1)\mathrm{H}_{n-k}(x_2)。\tag{14.122}$$

特别当 $x_1=x_2=x$ 时,上式给出

$$2^{\frac{n}{2}}\mathrm{H}_n(\sqrt{2}x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathrm{H}_k(x)\mathrm{H}_{n-k}(x)。\tag{14.123}$$

以下讨论如何把算符 $f(\hat{X})$ 变为: $f(\hat{X})$:。注意到

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}sf(s)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n\delta(x-s)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}sf(s)\int_{-\infty}^{\infty}t^{2n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-s)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}sf(s)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\exp\left(-\frac{1}{4}t^2-\mathrm{i}xt+\mathrm{i}st\right)\\&=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}sf(s)\exp[-(x-s)^2]。\end{aligned}\tag{14.124}$$

取 $f(x)=\mathrm{H}_n(x)$时,上式给出

$$\exp\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{H}_n(x)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\mathrm{H}_n(s)\exp[-(x-s)^2]=2^nx^n。\tag{14.125}$$

所以

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)x^n=2^{-n}\mathrm{H}_n(x)。\tag{14.126}$$

再用(14.51)式得

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\hat{X}^2}\right)\hat{X}^n=2^{-n}\mathrm{H}_n(\hat{X})=:\hat{X}^n:,\tag{14.127}$$

依靠此公式,可以把 $f(\hat{X})$变成: $f(\hat{X})$:,只要前者是 $\hat{X}$ 的多项式。

第十五章

非线性相干态

15.1 引言

近年来，非线性相干态的研究变成了量子光学与原子光学的一个热点[129]~[131]，其原因是不但可把很多量子光场的有物理意义的态矢量看作是非线性相干态，而且非线性相干态可以在物理实验中实现。例如离子被无线电频段的电磁波囚禁在阱中（称为离子阱）的相互作用哈密顿量可以写为

$$H_{\text{int}} = H_{\text{CM}} + H_{\text{el}}, \tag{15.1}$$

式中 H_{CM}表示外场与电量为 q 的带电离子的相互作用：

$$H_{\text{CM}} = -\frac{q}{m}\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{A}(0)。 \tag{15.2}$$

对于无线电（频段内）电磁波的波长而言，矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的变化在离子质心的位置测不准范围内可以忽略，所以矢量势取在原点 0 的位置。把囚禁离子的质心运动近似为一个三维谐振子，其在坐标方向的振动由

$$\hat{X}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu_i}}(a_i^\dagger + a_i) \tag{15.3}$$

描述，动量为 $\hat{p}_i = i\sqrt{\frac{m\hbar v_i}{2}}(a_i^\dagger - a_i)$，则

$$H_{\text{CM}} = -\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{d}_k \cdot E^{(-)}(t)\hat{a}_k + c.c, \tag{15.4}$$

式中 $c.c$ 表示第一项的厄米特共轭；$E^{(-)}(t)$是经典无线电波的负频部分；$\boldsymbol{d}_k=d\boldsymbol{e}_k$，$\boldsymbol{e}_k$ 是单位方向矢量，$d=q\Delta\hat{x}$，$\Delta\hat{x}$ 是在阱中离子处于基态时的质心位置不确定量。(15.1)式中的 H_{el}表示离子与激光场的相互作用(由电子态的跃迁引起)：

$$H_{el}=-\sum_{ij}d_{ij}\hat{E}(\boldsymbol{r},t)\hat{A}_{ij}, \tag{15.5}$$

式中 $d_{ij}=\langle i|d|j\rangle$，$\hat{A}_{ij}\equiv|i\rangle\langle j|$ 诱导出从$|i\rangle$态到$|j\rangle$态的跃迁，而电场为

$$\hat{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0 g(\hat{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+c.c, \tag{15.6}$$

式中 $g(\hat{r})$是一个算符函数，$c.c$ 表示前一项的厄米特共轭项。相对于光频 ω 作旋转波近似，并设激光的传播方向为 x 方向，并且 ω 与电子态$|1\rangle\to|2\rangle$的跃迁共振，在这种情况下，由相互作用图像可以得到相互作用哈密顿量(以上标(I)标记)

$$H_{int}^{(I)}=\frac{1}{2}\hbar\Omega\hat{g}[\hat{X}(t)]\hat{A}_{21}\exp[\mathrm{i}(\omega_{21}-\omega)t]+c.c, \tag{15.7}$$

式中 $\Omega=-2d_{21}\dfrac{E_0}{\hbar}$是 Rabi 频率。设行波光场

$$g(\hat{X})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\hat{x}}=\exp[\mathrm{i}\eta(a+a^{\dagger})], \tag{15.8}$$

式中 $\eta=k\Delta x$，k 是激光波矢在 x 方向上的投影。定义 Lamb-Dicke 参数正比于处在振动态中的离子质心的测不准量 Δx 与激光波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$之比，那么该参数就给出一个尺度，在此尺度内可将离子看作是一个与激光相互作用的点粒子，通常记 $\eta\sqrt{n+1}\ll 1$ 为 Lamb-Dicke 极限。

由于

$$g(\hat{X})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta a^{\dagger}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta a}\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)=\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}\right)\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\eta)^{k+l}}{k!l!}a^{\dagger k}a^{l}, \tag{15.9}$$

即(15.7)式中的$\hat{g}[\hat{X}(t)]$通常可以写为$f_k(a^\dagger a,\eta)(\mathrm{i}\eta a)^k$的形式，所以在理论上就要讨论$f(a^\dagger a)a$的本征态，这就是非线性相干态。也就是说在讨论囚禁离子的质心运动时须考虑非线性相干态。

15.2　非线性相干态的IWOP技术[132]~[137]

非线性相干态的定义是作为$f(N)a$的本征态：

$$|z\rangle_f = \exp\left[\frac{z}{f(N-1)}a^\dagger\right]|0\rangle。\tag{15.10}$$

由于

$$\left[f(N)a,\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]=1,\quad f(N)a\,|z\rangle_f = z\,|z\rangle_f,\tag{15.11}$$

故可以引入有关$f(N)a$与$\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger$的广义排序。当所有的$\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger$都站在$f(N)a$的左边，称这个排好了的算符是一个广义的正规乘积排列，记为$\vdots\quad\vdots$，它具有以下性质：

(1) 在广义正规乘积$\vdots\quad\vdots$内部，$f(N)a$与$\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger$是对易的，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger f(N)a &= \vdots\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger f(N)a\vdots\\ &= \vdots f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\vdots。\end{aligned}\tag{15.12}$$

(2) 在$\vdots\quad\vdots$内部的$\vdots\quad\vdots$可以取消。

(3) 对广义正规乘积中的c数可以积分(或微分)，只要此积分收敛。

(4) 真空态投影算符的广义正规乘积表示是

$$|0\rangle\langle 0| = \vdots \exp\left[-\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger} f(N)a\right]\vdots。\quad (15.13)$$

其证明如下：由于

$$a^{\dagger n}a^{n} = \left[\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]^{n}[f(N)a]^{n}$$
$$= \vdots\left[\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger} f(N)a\right]^{n}\vdots, \quad (15.14)$$

所以

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^{\dagger}a}: = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}a^{\dagger n}a^{n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\vdots\left[\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger} f(N)a\right]^{n}\vdots$$
$$= \vdots\exp\left[-\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger} f(N)a\right]\vdots。\quad (15.15)$$

15.3　非线性相干态的完备性关系与广义压缩算符

由于非线性相干态的特殊性，还须引入$\frac{1}{f(N)}a$的本征态：

$$\frac{1}{f(N)}a|z\rangle\rangle_{f} = z|z\rangle\rangle_{f},\quad |z\rangle\rangle_{f} = \exp[za^{\dagger} f(N)]|0\rangle。$$
$$(15.16)$$

$(|z'\rangle\rangle_{f})^{\dagger}$和$|z\rangle_{f}$的内积是

$${}_{f}\langle\langle z'|z\rangle_{f} = \langle 0|\exp[z'^{*} f(N)a]\exp\left[\frac{z}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]|0\rangle$$
$$= \exp(z'^{*}z)。\quad (15.17)$$

非线性相干态的完备性关系由下式构建：

$$\int\frac{d^{2}z}{\pi}\exp(-|z|^{2})|z\rangle_{f\,f}\langle\langle z|$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp\left[-|z|^2 + \frac{z}{f(N-1)} a^\dagger\right] \\
&\quad \cdot :\exp\left[-\frac{1}{f(N-1)} a^\dagger f(N) a\right]: \exp[z^* f(N) a] \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} :\exp\left[-|z|^2 + \frac{z}{f(N-1)} a^\dagger - \frac{1}{f(N-1)}\right. \\
&\quad \left. \cdot a^\dagger f(N) a + z^* f(N) a\right]: = 1。 \qquad (15.18)
\end{aligned}
$$

在推导第二步中已经用到了广义正规乘积的概念，即在 $:\exp\left[-\frac{1}{f(N-1)} a^\dagger f(N) a\right]:$ 的左边是 $\frac{1}{f(N-1)} a^\dagger$ 的函数，而右边是 $f(N)a$ 的函数，因此第二个积分总体是一个广义的正规乘积形式，故可以用 IWOP 技术积分之。

作为 IWOP 技术的另一应用，考虑用非线性相干态构建算符：

$$
\begin{aligned}
U &= s^{*-\frac{1}{2}} |s| \int \frac{d^2 z}{\pi} |sz - rz^*\rangle_f \, {}_f\langle\langle z| \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}|sz - rz^*|^2 - \frac{1}{2}|z|^2\right) \\
&= s^{*-\frac{1}{2}} |s| \int \frac{d^2 z}{\pi} :\exp\left\{-|s|^2 |z|^2 + sz \frac{1}{f(N-1)} a^\dagger\right. \\
&\quad + z^*\left[f(N) a - r \frac{1}{f(N-1)} a^\dagger\right] + \frac{1}{2} r^* s z^2 + \frac{1}{2} r s^* z^{*2} \\
&\quad \left. - \frac{1}{f(N-1)} a^\dagger f(N) a\right\}: \\
&= \exp\left\{-\frac{r}{2s^*}\left[\frac{1}{f(N-1)} a^\dagger\right]^2\right\} \exp\left[-\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \ln s^*\right] \\
&\quad \cdot \exp\left\{\frac{r^*}{2s^*}[f(N) a]^2\right\}, \qquad (15.19)
\end{aligned}
$$

式中 $|s|^2 - |r|^2 = 1$，并已用了算符恒等式：

$$
\exp(k a^\dagger a) = :\exp[(e^k - 1) a^\dagger a]:
$$

$$= \vdots \exp\left[(e^k - 1)\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger f(N)a\right]\vdots。\tag{15.20}$$

用(15.19)式可证得

$$U^{-1}f(N)aU = sf(N)a - r\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger,\tag{15.21}$$

$$U^{-1}\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger U = s^*\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger - r^* f(N)a。\tag{15.22}$$

所以称 U 为广义的压缩算符。

15.4 非线性 *SU*(3)电荷、超荷相干态

在早期的基本粒子模型中,有夸克的 $SU(3)$ 模型。$SU(3)$ 群有 8 个生成元,在三模 Fock 空间中的表示为

$$\begin{aligned}
S^1 &= a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1,\\
S^2 &= -\mathrm{i}a_1^\dagger a_2 + \mathrm{i}a_2^\dagger a_1,\\
S^3 &= a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2,\\
S^4 &= a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1,\\
S^5 &= -\mathrm{i}a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1,\\
S^6 &= a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2,\\
S^7 &= -\mathrm{i}a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2,\\
S^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - 2a_3^\dagger a_3),
\end{aligned}\tag{15.23}$$

这里 $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$,$S^3$ 与 S^8 分别称为电荷算符与超符算符。可以建立非线性的 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态 $|z,y,q\rangle_f$,它满足本征方程

$$f(N_1,N_2,N_3)a_1a_2a_3 \mid z,y,q\rangle_f = z \mid z,y,q\rangle_f,$$

$$N_i = a_i^\dagger a_i,\quad Q \equiv S^3,\quad Y \equiv S^8,$$

$$Q \mid z,y,q\rangle_f = q \mid z,y,q\rangle_f,$$
$$Y \mid z,y,q\rangle_f = y \mid z,y,q\rangle_f。\tag{15.24}$$

注意：

$$[f(N_1,N_2,N_3)a_1a_2a_3,Q] = 0,$$
$$[f(N_1,N_2,N_3)a_1a_2a_3,Y] = 0。\tag{15.25}$$

为了求$|z,y,q\rangle_f$ 的显式，把它在三模 Fock 空间中展开：

$$\mid z,y,q\rangle_f = \sum_{m,n,l=0}^{\infty} C_{m,n,l} \mid m,n,l\rangle,$$
$$\mid m,n,l\rangle = \frac{a_1^{\dagger m}a_2^{\dagger n}a_3^{\dagger l}}{\sqrt{m!n!l!}} \mid 0,0,0\rangle。\tag{15.26}$$

把 Q 与 Y 作用于$|z,y,q\rangle_f$，分别得到

$$n-l = 2y-q, \quad m-l = y+q。\tag{15.27}$$

把 $f(N_1,N_2,N_3)a_1a_2a_3$ 作用于(15.26)式，得递推关系：

$$C_{m,n,l} = \frac{z}{f(m-1,n-1,l-1)\sqrt{mnl}}C_{m-1,n-1,l-1}$$
$$= z^l\sqrt{\frac{(m-l)!(n-l)!}{m!n!l!}}\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{f(m-k,n-k,l-k)}C_{m-l,n-l,0}。\tag{15.28}$$

不失一般，令 $m\geqslant l,n\geqslant l$，则有

$$\mid z,y,q\rangle_f = C_0\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(za_1^{\dagger}a_2^{\dagger}a_3^{\dagger})^l}{[(m-l+1)\cdots m][(n-l+1)\cdots n]l!}$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{f(m-k,n-k,l-k)}\mid m-l,n-l,0\rangle,\tag{15.29}$$

式中 $C_0\equiv C_{m-l,n-l,0}$是归一化常数，而

$$\frac{1}{[(m-l+1)\cdots m][(n-l+1)\cdots n]}$$
$$\cdot\prod_{k'=1}^{l}\frac{1}{f(N_1+l-k',N_2+l-k',N_3+l-k')}\mid m-l,n-l,0\rangle$$

$$=\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{(m-l+k)(n-l+k)f(N_1-1+k,N_2-1+k,N_3-1+k)}$$
$$\cdot|m-l,n-l,0\rangle$$
$$=\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{(N_1+k)(N_2+k)f(N_1-1+k,N_2-1+k,N_3-1+k)}$$
$$\cdot|m-l,n-l,0\rangle。\tag{15.30}$$

用算符恒等式

$$(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger)^l\prod_{k=1}^{l}f(N_1+k,N_2+k,N_3+k)$$
$$=[f(N_1,N_2,N_3)a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger]^l\tag{15.31}$$

及(15.30)式,可把(15.29)式化简为

$$|z,y,q\rangle_f=C_0\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}\left[\frac{1}{N_1N_2f(N_1-1,N_2-1,N_3-1)}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger\right]^l$$
$$\cdot|y+q,2y-q,0\rangle$$
$$=C_0\exp\left[\frac{z}{N_1N_2f(N_1-1,N_2-1,N_3-1)}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger\right]$$
$$\cdot|y+q,2y-q,0\rangle。\tag{15.32}$$

特别当 $f(N_1,N_2,N_3)=1$,(15.32)式约化为普通的 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态:

$$|z,y,q\rangle=C_0\exp\left(\frac{z}{N_1N_2}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger\right)|y+q,2y-q,0\rangle,\tag{15.33}$$

它是 $a_1a_2a_3$ 的本征态。事实上,把 a_3 作用于上式,得

$$a_3|z,y,q\rangle=C_0\left[a_3,\exp\left(\frac{z}{N_1N_2}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger\right)\right]|y+q,2y-q,0\rangle$$
$$=\frac{z}{N_1N_2}a_1^\dagger a_2^\dagger|z,y,q\rangle。\tag{15.34}$$

再令 $a_1a_2\frac{1}{N_1N_2}a_1^\dagger a_2^\dagger=1$,可见 $a_1a_2a_3|z,y,q\rangle=z|z,y,q\rangle$。

再举一例,当

$$f(N_1,N_2,N_3)=\frac{1}{\sqrt{(N_1+1)(N_2+1)(N_3+1)}},\tag{15.35}$$

则

$$|z,y,q\rangle_f=C_0\exp\left(\frac{z\sqrt{N_3}}{\sqrt{N_1N_2}}a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}a_3^{\dagger}\right)|y+q,2y-q,0\rangle。\tag{15.36}$$

由于光子相位算符(Suskind-Glogower 形式)是$\frac{1}{\sqrt{N_1+1}}a_1$，所以上式是三模 S-G 算符的本征态。

可把以上讨论推广到 m 模情形，参见文献[134]。

15.5　密度矩阵在非线性相干态表象中的展开

用非线性相干态的完备性关系(15.18)式，可以把密度矩阵 ρ 展开为

$$\rho=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P_f(z)\exp(-|z|^2)\,|z\rangle_{f\,f}\langle\langle z|。\tag{15.37}$$

$P_f(z)$称为 ρ 的广义 P 表示。(15.37)式的逆变换为

$$P_f(z)\exp(-|z|^2)=\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle-\beta|\rho|\beta\rangle_f\exp(\beta^*z-z^*\beta),\tag{15.38}$$

式中${}_f\langle\langle-\beta|$和$|\beta\rangle_f$是不互为共轭的非线性相干态。

事实上，把(15.37)式代入(15.38)式，并用(15.17)式，即得

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle-\beta|\int\frac{\mathrm{d}^2z'}{\pi}P_f(z')\exp(-|z'|^2)\,|z'\rangle_{f\,f}\langle\langle z'|\beta\rangle_f\\&\quad\cdot\exp(\beta^*z-z^*\beta)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z'}{\pi}P_f(z')\exp(-|z'|^2)\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\\&\quad\cdot\exp(\beta^*z-z^*\beta-\beta^*z'+z'^*\beta)\\&=P_f(z)\exp(-|z|^2)。\end{aligned}\tag{15.39}$$

这是对于普通相干态理论的非平庸推广。

为进一步利用(15.37)式把密度矩阵ρ展开为“反正规”乘积$\left(\text{这里的反正规是指所有的}\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\text{站在}f(N)a\text{的右边}\right)$，引入广义反正规编序下的积分技术，其主要内容为：

(1) 非线性玻色算符$f(N)a$和$\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}$在反正规乘积记号$\vdots\ \vdots$内是相互对易的：

$$f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}=\vdots f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\vdots$$
$$=\vdots\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}f(N)a\vdots。\quad(15.40)$$

(2) 在一个反正规乘积记号$\vdots\ \vdots$内的另一个$\vdots\ \vdots$可以取消。

(3) 可以对$\vdots\ \vdots$内的c数进行积分，只要该积分收敛。

(4) 真空投影算符的反正规乘积形式是

$$|0\rangle\langle 0|=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\exp[i\eta f(N)a]\exp\left[i\eta^*\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]。\quad(15.41)$$

证明如下：

$$\int\frac{d^2\eta}{\pi}\exp\{-i\eta[z-f(N)a]\}\exp\left\{-i\eta^*\left[z^*-\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]\right\}$$
$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\vdots\exp\left\{-|\eta|^2-i\eta[z-f(N)a]-i\eta^*\left[z^*-\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]\right\}\vdots$$
$$=\vdots\exp\left\{-\left[\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}-z^*\right][f(N)a-z]\right\}\vdots$$
$$=|z\rangle_{f\ f}\langle\langle z|\exp(-|z|^2)。\quad(15.42)$$

当$z=0$,(15.42)式变成(15.41)式。

用(15.41)式、(15.10)式及(15.16)式，可得

$$|z\rangle_{f\ f}\langle\langle z|=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\exp\left[z\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]\exp[i\eta f(N)a]$$
$$\cdot\exp\left[i\eta^*\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]\exp[z^*f(N)a]$$

$$= \int \frac{d^2\eta}{\pi} \vdots \exp\left[i\eta f(N)a + i\eta^* \frac{1}{f(N-1)}a^\dagger + z^* f(N)a + z\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\exp(-|z|^2 - iz\eta - iz^*\eta^*) \vdots。\quad (15.43)$$

联立(15.43)式、(15.39)式和(15.38)式,可得

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\int \frac{d^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle -\beta|\rho|\beta\rangle_f \exp(\beta^* z - z^*\beta)\ |z\rangle_f\ {}_f\langle\langle z|$$

$$= \int \frac{d^2 z}{\pi}\int \frac{d^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle -\beta|\rho|\beta\rangle_f \exp(\beta^* z - z^*\beta)$$

$$\cdot\int \frac{d^2\eta}{\pi} \vdots \exp\left[i\eta f(N)a + i\eta^* \frac{1}{f(N-1)}a^\dagger + z^* f(N)a + z\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right] \vdots \exp(-|z|^2 - iz\eta - iz^*\eta^*)$$

$$= \vdots\int \frac{d^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle -\beta|\rho|\beta\rangle_f\int \frac{d^2\eta}{\pi}\exp\left[i\eta f(N)a + i\eta^* \frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]$$

$$\cdot\int \frac{d^2 z}{\pi}\exp\left[-|z|^2 - iz\eta - iz^*\eta^* + \beta^* z - z^*\beta + z^* f(N)a + z\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right] \vdots$$

$$= \vdots\int \frac{d^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle -\beta|\rho|\beta\rangle_f\int \frac{d^2\eta}{\pi}\exp\left[i\eta f(N)a + i\eta^* \frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]$$

$$\cdot \exp\left\{\left[\beta^* - i\eta + \frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\left[f(N)a - i\eta^* - \beta\right]\right\} \vdots$$

$$= \vdots\int \frac{d^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle -\beta|\rho|\beta\rangle_f \exp(-|\beta|^2)$$

$$\cdot \exp\left[\beta^* f(N)a - \beta\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger + f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]$$

$$\cdot\int \frac{d^2\eta}{\pi}\exp(-|\eta|^2 - i\eta^*\beta^* + i\eta\beta) \vdots$$

$$= \vdots\int \frac{d^2\beta}{\pi}{}_f\langle\langle -\beta|\rho|\beta\rangle_f \exp\left[\beta^* f(N)a - \beta\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger + f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right] \vdots 。\quad (15.44)$$

这就是密度矩阵的反正规乘积化的公式，尤其是当ρ是已经广义正规排列好了的，那么用(15.44)式积分立即就导出ρ的反正规排序。例如由$\exp(\lambda a^\dagger a)$的广义正规排列式(15.20)，立即可以导出

$$\begin{aligned}&{}_f\langle\langle -\beta|\exp(\lambda a^\dagger a)|\beta\rangle_f\\&={}_f\langle\langle -\beta|:\exp\left[(e^\lambda-1)\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger f(N)a\right]:|\beta\rangle_f\\&=\exp(-e^\lambda|\beta|^2)。\end{aligned}\tag{15.45}$$

代入(15.44)式，积分得到

$$\begin{aligned}\exp(\lambda a^\dagger a)&=\vdots\int\frac{d^2\beta}{\pi}\exp\left[-e^\lambda|\beta|^2+\beta^* f(N)a\right.\\&\left.\quad-\beta\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger+f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\vdots\\&=e^{-\lambda}\vdots\exp\left[(1-e^{-\lambda})f(N)a\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\vdots。\end{aligned}\tag{15.46}$$

15.6 非线性相干态的正 P 表示

本节介绍如何对于非线性系统引入密度矩阵的正P表示，它说明，对于有物理意义的密度算符总可以选为是正的表示，这与有的P表示为奇异的或负值截然相异。为了以下讨论的方便，改写

$$\begin{aligned}|z\rangle_f&=\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\exp\left[\frac{z}{f(N-1)}a^\dagger\right]|0\rangle,\\|z\rangle\rangle_f&=\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\exp[za^\dagger f(N)]|0\rangle。\end{aligned}\tag{15.47}$$

引入广义正规乘积形式的投影算符：

$$\begin{aligned}|z\rangle_f{}_f\langle\langle z|&=:\exp\left\{-\left[z^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right][z-f(N)a]\right\}:\\&=\int d^2\tau\exp[-(\tau^*-z^*)(\tau-z)]:\delta\left[\tau^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\end{aligned}$$

$$\cdot\delta[\tau-f(N)a]\exp\left\{-\left[\tau^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right][\tau-f(N)a]\right\}:, \tag{15.48}$$

式中

$$:\delta\left[\tau^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\delta[\tau-f(N)a]:$$
$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi^2}:\exp\left\{\eta^*[\tau-f(N)a]-\eta\left[\tau^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\right\}:。 \tag{15.49}$$

把(15.49)式代入(15.48)式,并令

$$\tau=\frac{1}{2}(z_1+z_2^*),\quad \eta=\frac{1}{2}(z_1-z_2^*),\quad d^2\eta d^2\tau=\frac{d^2z_1d^2z_2}{4}, \tag{15.50}$$

则(15.48)式变为

$$|z\rangle_{f\,f}\langle\langle z|=\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{4\pi^2}:\exp\left\{-\left[z^*-\frac{1}{2}(z_1^*+z_2^*)\right]\right.$$
$$\cdot\left[z-\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right]-\frac{1}{4}|z_1-z_2|^2$$
$$\left.-\left[z_2^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right][z_1-f(N)a]\right\}:。 \tag{15.51}$$

可以认定

$$\exp\left[-\frac{|z|^2}{2}-\frac{1}{8}|z_1+z_2|^2+\frac{1}{2}(z_1^*+z_2^*)z\right]={}_f\langle\langle\frac{z_1+z_2}{2}|z\rangle_f,$$
$$\exp\left[-\frac{|z|^2}{2}-\frac{1}{8}|z_1+z_2|^2+\frac{1}{2}(z_1+z_2)z^*\right]={}_f\langle\langle z|\frac{z_1+z_2}{2}\rangle_f。 \tag{15.52}$$

再注意到(15.17)式,可把(15.51)式纳入以下紧凑形式:

$$|z\rangle_{f\,f}\langle\langle z|=\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{4\pi^2}\;{}_f\langle\langle\frac{z_1+z_2}{2}|z\rangle_{f\,f}\langle\langle z|\frac{z_1+z_2}{2}\rangle_f$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}\right)\frac{|z_1\rangle_f\ {}_f\langle\langle z_2|}{{}_f\langle\langle z_2|z_1\rangle_f}。\tag{15.53}$$

把它代入广义 P 表示，就有

$$\rho=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P_f(z)\ |z\rangle_f\ {}_f\langle\langle z|$$

$$=\int\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2P_{f+}(z_1,z_2)\ \frac{|z_1\rangle_f\ {}_f\langle\langle z_2|}{{}_f\langle\langle z_2|z_1\rangle_f},\tag{15.54}$$

式中

$$P_{f+}(z_1,z_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P_f(z)\ {}_f\langle\langle\frac{z_1+z_2}{2}|z\rangle_f\ {}_f\langle\langle z|\frac{z_1+z_2}{2}\rangle_f$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}\right)\tag{15.55}$$

或

$$P_{f+}(z_1,z_2)=\frac{1}{4\pi^2}\exp\left(-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}\right){}_f\langle\langle\frac{z_1+z_2}{2}|\rho|\frac{z_1+z_2}{2}\rangle_f。\tag{15.56}$$

这称为非线性相干态基下的正 P 表示，因为对于有物理意义的密度算符，它总存在并且可选为正值，注意在(15.51)式中 d^2z_1 与 d^2z_2 是独立的变量。

15.7 广义特征函数与正 P 表示的关系

用(15.56)式可以建立以下积分：

$$I\equiv\int P_{f+}(z_1,z_2)\exp(\lambda z_2^*-\lambda^*z_1)\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2$$

$$=\int\frac{1}{4\pi^2}\exp(\lambda z_2^*-\lambda^*z_1)\exp\left(-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}\right)$$

$$\cdot{}_f\langle\langle\frac{z_1+z_2}{2}|\rho|\frac{z_1+z_2}{2}\rangle_f\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2。\tag{15.57}$$

如(15.50)式那样作积分变数变换，并用非线性相干态的完备性，得

$$
\begin{aligned}
I=&\int \frac{d^2\tau d^2\eta}{\pi^2}\exp[-|\eta|^2+\lambda(\tau^*-\eta^*)\\
&-\lambda^*(\tau+\eta)]_f\langle\langle\tau|\rho|\tau\rangle_f\\
=&\exp(|\lambda|^2)\mathrm{Tr}\left\{\exp\left[\lambda\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]\rho\exp[-\lambda^* f(N)a]\right\}\\
=&\exp\left(\frac{|\lambda|^2}{2}\right)\mathrm{Tr}\left\{\rho\exp\left[\lambda\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger-\lambda^* f(N)a\right]\right\}\\
\equiv&\exp\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)^2\chi_f(\lambda),
\end{aligned}
\tag{15.58}
$$

式中 $\chi_f(\lambda)$称为广义特征函数。结合以上两式,可得,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left\{\rho\exp\left[\lambda\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger-\lambda^* f(N)a\right]\right\}\\
&=\exp\left(-\frac{|\lambda|^2}{2}\right)\int P_{f+}(z_1,z_2)\exp(\lambda z_2^*-\lambda^* z_1)d^2z_1d^2z_2。
\end{aligned}
\tag{15.59}
$$

这是广义特征函数与正 P 表示之间的关系。进一步,用 $\chi_f(\lambda)$可定义广义 Wigner 函数:

$$
\int\exp(\lambda^*\alpha-\lambda\alpha^*)\chi_f(\lambda)d^2\lambda=W_f(\alpha)。\tag{15.60}
$$

它对应于广义 Wigner 算符:

$$
\int\exp(\lambda^*\alpha-\lambda\alpha^*)\exp\left[\lambda\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger-\lambda^* f(N)a\right]d^2\lambda=\Delta_f(\alpha,\alpha^*),\tag{15.61}
$$

其正规乘积形式是

$$
\Delta_f=\frac{1}{\pi}:\exp\left\{-2\left[\alpha^*-\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right][\alpha-f(N)a]\right\}:。\tag{15.62}
$$

用广义 Wigner 算符可以定义算符 $\rho\left[f(N)a,\frac{1}{f(N-1)}a^\dagger\right]$的经典 Weyl 对应函数:

$$\rho\left[f(N)a,\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right]=2\int d^2\alpha\kappa(\alpha,\alpha^*)\Delta_f(\alpha,\alpha^*)。\tag{15.63}$$

把它代入(15.56)式，并用(15.62)式，得

$$\begin{aligned}P_{f+}(z_1,z_2)&=\frac{1}{2\pi^3}\exp\left(-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}\right)\\&\quad\cdot\int d^2\alpha\kappa(\alpha,\alpha^*)\,{}_f\langle\left\langle\frac{z_1+z_2}{2}\right|\Delta_f(\alpha,\alpha^*)\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right\rangle_f\\&=\frac{1}{2\pi^3}\exp\left(-\frac{|z_1-z_2|^2}{4}\right)\\&\quad\cdot\int d^2\alpha\kappa\left(\alpha+\frac{z_1+z_2}{2},\alpha^*+\frac{z_1^*+z_2^*}{2}\right)\exp(-2|\alpha|^2)。\end{aligned}\tag{15.64}$$

所以当ρ的经典 Weyl 对应函数已知时，可由上式求出其正 P 表示。

15.8　非线性“荷”守恒相干态与非线性纠缠态

令 $N_a=a^{\dagger}a,N_b=b^{\dagger}b$，并注意到以下两个算符对易：

$$[N_a-N_b,f(N_a)ag(N_b)b]=0。\tag{15.65}$$

试寻求它们的共同本征态：

$$\begin{aligned}(N_a-N_b)|r^2,q\rangle_{f,g}&=q|r^2,q\rangle_{f,g},\\f(N_a)g(N_b)ab|r^2,q\rangle_{f,g}&=r^2|r^2,q\rangle_{f,g}。\end{aligned}\tag{15.66}$$

利用非线性相干态：

$$\begin{aligned}|\alpha,\beta\rangle_{f,g}&=\exp\left[\frac{\alpha}{f(N_a-1)}a^{\dagger}+\frac{\beta}{g(N_b-1)}b^{\dagger}\right]|0,0\rangle\\&=|\alpha\rangle_f\otimes|\beta\rangle_g。\end{aligned}\tag{15.67}$$

令

$$\alpha=\lambda e^{-i(\theta+\varphi)},\quad\beta=\mu e^{-i(\theta-\varphi)},\tag{15.68}$$

把$|\alpha,\beta\rangle_{f,g}$对相位 $e^{iq\varphi}$进行积分平均，得

$$
\begin{aligned}
|\lambda\mu e^{-2i\theta},q\rangle_{f,g} &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{iq\varphi}\,|\alpha,\beta\rangle_{f,g} \\
&= C_q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\mu e^{-2i\theta})^n}{[n!(n+q)!]^{\frac{1}{2}}\prod_{l=0}^{n+q-1}f(l)\prod_{m=0}^{n-1}g(m)}\,|n+q,n\rangle,
\end{aligned}
\tag{15.69}
$$

式中 C_q 是一个归一化常数。再令 $\lambda=\mu=re^{i\theta}$，

$$
\begin{aligned}
|r^2,q\rangle_{f,g} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{iq\varphi}\exp\left[\frac{re^{-i\varphi}}{f(N_a-1)}a^\dagger+\frac{re^{i\varphi}}{g(N_b-1)}b^\dagger\right]|0,0\rangle \\
&= C_q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{[n!(n+q)!]^{\frac{1}{2}}\prod_{l=0}^{n+q-1}f(l)\prod_{m=0}^{n-1}g(m)}\,|n+q,n\rangle,
\end{aligned}
\tag{15.70}
$$

就可以验证 $|r^2,q\rangle_{f,q}$ 确实是“荷”守恒的非线性相干态。特别当 $f(N_a)=1,g(N_b)=1$，它约化为“荷”相干态。在非线性介质中的双光子吸收或增益的过程中可能会生成这类相干态。

注意到

$$
\left[\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger,N_a-N_b\right]=0, \tag{15.71}
$$

将 $\exp\left[\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger\right]$ 作用到 $|r^2,q\rangle_{f,q}$ 上，得到

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[-\frac{r^2}{2}-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger\right]|r^2,q\rangle_{f,g} \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{iq\varphi}\exp\left[-\frac{r^2}{2}-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger\right. \\
&\quad\left.+\frac{re^{-i\varphi}}{f(N_a-1)}a^\dagger+\frac{re^{i\varphi}}{g(N_b-1)}b^\dagger\right]|0,0\rangle \\
&\equiv \| r^2,q\rangle_{f,g}。
\end{aligned}
\tag{15.72}
$$

由此可以定义一个新的态矢量：

$$
|\eta\equiv re^{-i\varphi}\rangle_{f,g}=\exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger\right.
$$

$$+\frac{\eta}{f(N_a-1)}a^{\dagger}+\frac{\eta^*}{g(N_b-1)}b^{\dagger}\Big]|0,0\rangle,$$

(15.73)

称之为非线性纠缠态，而(15.70)式可简化为

$$\| r^2,q\rangle_{f,g}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi e^{\mathrm{i}q\varphi}|\eta=re^{-\mathrm{i}\varphi}\rangle。\quad(15.74)$$

$|\eta=re^{-\mathrm{i}\varphi}\rangle_{f,g}$所遵守的本征方程是

$$\begin{aligned}&\left[f(N_a)a+\frac{1}{g(N_b-1)}b^{\dagger}\right]|\eta\rangle_{f,g}=\eta|\eta\rangle_{f,g},\\&\left[g(N_b)b+\frac{1}{f(N_a-1)}a^{\dagger}\right]|\eta\rangle_{f,g}=\eta^*|\eta\rangle_{f,g}。\end{aligned}\quad(15.75)$$

特别当 $f(N)=1,g(N)=1$，(15.73)式约化为 EPR 两体纠缠态。以上讨论表明，对应于非线性相干态也可以定义非线性纠缠态，它们在光的非线性过程中会起作用。

15.9 非线性纠缠态的完备性关系与双模广义压缩算符

为了构造非线性纠缠态的完备性关系，引入另一种态：

$$|\eta\rangle\rangle_{f,g}=\exp\Big[-\frac{r^2}{2}-f(N_a-1)g(N_b-1)a^{\dagger}b^{\dagger}$$

$$+\eta f(N_a-1)a^{\dagger}+\eta^*g(N_b-1)b^{\dagger}\Big]|0,0\rangle,$$

(15.76)

然后由双模真空态的广义正规乘积展开式：

$$|0,0\rangle\langle 0,0|=\,:\exp\left[-\frac{1}{f(N_a-1)}a^{\dagger}f(N_a)a-\frac{1}{g(N_b-1)}b^{\dagger}g(N_b)b\right]:\,,$$

(15.77)

用 IWOP 技术积分以下不互厄米特共轭的|ket⟩⟨bra|型算符：

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle_{f,g\ f,g}\langle\langle\eta|=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\exp\Big[-\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^{\dagger}b^{\dagger}$$

$$+\frac{\eta}{f(N_a-1)}a^\dagger+\frac{\eta^*}{g(N_b-1)}b^\dagger\Big]$$

$$\cdot|0,0\rangle\langle 0,0|\exp\Big[-\frac{|\eta|^2}{2}-abf(N_a-1)g(N_b-1)$$

$$+\eta^* af(N_a-1)+\eta bg(N_b-1)\Big]$$

$$=\int\frac{d^2\eta}{\pi}:\exp\Big\{-|\eta|^2-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger$$

$$+\eta\Big[\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger+bg(N_b-1)\Big]$$

$$+\eta^*\Big[\frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger+af(N_a-1)\Big]$$

$$-\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger f(N_a)a-\frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger g(N_b)b$$

$$-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger-abf(N_a-1)g(N_b-1)\Big\}:$$

$$=1。\tag{15.78}$$

(15.78)式也是一种完备性关系。从(15.76)式引入

$$\| r^2,q\rangle\rangle_{f,g}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi e^{iq\varphi}\mid\eta=re^{-i\varphi}\rangle\rangle_{f,g},\tag{15.79}$$

它与(15.74)式不同。从(15.74)式与(15.79)式，又可以导出另一种完备性关系：

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty dr^2\| r^2,q\rangle_{f,g}\ {}_{f,g}\langle\langle r^2,q\|=1,\tag{15.80}$$

然后计算

$${}_{f,g}\langle\langle r'^2,q'\|\Big[f(N_a)a+\frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger\Big]$$

$$\cdot\Big[g(N_b)b+\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger\Big]\| r^2,q\rangle_{f,g}$$

$$=r'^2\ {}_{f,g}\langle\langle r'^2,q'\| r^2,q\rangle_{f,g}=r^2\ {}_{f,g}\langle\langle r'^2,q'\| r^2,q\rangle_{f,g},$$

$${}_{f,g}\langle\langle r'^2,q'\|(N_a-N_b)\| r^2,q\rangle_{f,g}$$

$$=q'\ {}_{f,g}\langle\langle r'^2,q' \| r^2,q\rangle_{f,g}=q\ {}_{f,g}\langle\langle r'^2,q' \| r^2,q\rangle_{f,g}。\tag{15.81}$$

因此推出正交性关系：

$${}_{f,g}\langle\langle r'^2,q' \| r^2,q\rangle_{f,g}=\frac{1}{2r}\delta(r-r')\delta_{q,q'}。\tag{15.82}$$

作为(15.78)式的应用，计算以下的积分，注意 $u=\mathrm{e}^{\lambda}$，

$$S_{f,g}(\lambda)=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\left|\frac{\eta}{u}\right\rangle_{f,g}\ {}_{f,g}\langle\langle\eta|$$

$$=:\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\exp\Big[-\frac{|\eta|^2}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)+\frac{\eta}{f(N_a-1)u}a^\dagger$$

$$+\frac{\eta^*}{ug(N_b-1)}b^\dagger-\frac{1}{f(N_a-1)g(N_b-1)}a^\dagger b^\dagger$$

$$-\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger f(N_a)a-\frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger g(N_b)b$$

$$-abf(N_a-1)g(N_b-1)+\eta^* af(N_a-1)+\eta bg(N_b-1)\Big]:$$

$$=\operatorname{sech}\lambda:\exp\Big\{\tanh\lambda\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger\ \frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger$$

$$+\left[\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger f(N_a)a+\frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger g(N_b)b\right]$$

$$\cdot(\operatorname{sech}\lambda-1)-\tanh\lambda f(N_a)ag(N_b)b\Big\}:$$

$$=\exp\left[\tanh\lambda\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger\ \frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger\right]$$

$$\cdot\exp[(a^\dagger a+b^\dagger b+1)\ln\operatorname{sech}\lambda]$$

$$\cdot\exp[-\tanh\lambda f(N_a)ag(N_b)b]。\tag{15.83}$$

这就是双模广义压缩算符。

在 $S_{f,g}(\lambda)$ 的变换下，

$$S_{f,g}(\lambda)\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger S_{f,g}(\lambda)^{-1}=\frac{1}{f(N_a-1)}a^\dagger\cosh\lambda-g(N_b)b\sinh\lambda,$$

$$S_{f,g}(\lambda)f(N_a)aS_{f,g}(\lambda)^{-1}=f(N_a)a\cosh\lambda-\frac{1}{g(N_b-1)}b^\dagger\sin\lambda。$$

$$\tag{15.84}$$

习　题

1. 可以把量子光场中的某些态矢量看作是非线性相干态。例如单模压缩真空态 $S(z)|0\rangle$，其中

$$S(z)=\exp\left(\frac{z}{2}a^2-\frac{z^*}{2}a^{\dagger 2}\right),$$

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}。$$

试证明：

$$\frac{1}{N+1}a^2S(z)\mid 0\rangle=\alpha S(z)\mid 0\rangle,$$

$$\frac{1}{\sqrt{N+1}}a^2S(z)\mid 1\rangle=\alpha S(z)\mid 1\rangle,$$

式中 $\alpha=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tanh\gamma$。

2. 在相干态 $|z\rangle$ 上激发 m 个光子，可以用态 $a^{\dagger m}|z\rangle$ 表示，称为光子附加态。试问是否也可以把 $a^{\dagger m}|z\rangle$ 看作非线性相干态？

3. 求满足 $\frac{1}{\sqrt{N+1}}a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$ 的非线性相干态，并求其相应的完备性关系。

4. 求 $\exp\left[\lambda\left(\frac{1}{f(N-1)}a^{\dagger}\right)^2\right]\exp\{\sigma[f(N)a]^2\}$ 的广义正规乘积展开。

第十六章

用纠缠态表象求解的若干量子力学问题

16.1 转动电偶极子和广义爱仑费斯特定理

本节用纠缠态表象推导广义的爱仑费斯特定理。爱仑费斯特定理的原来涵义是:根据玻尔对应原理,经典力学是量子力学在普朗克常数 $\hbar \to 0$ 的极限;量子力学不但须与经典物理在某种近似下与经典物理自洽,而且也应导出经典物理的定律。例如,从薛定谔方程可以导出所谓的爱仑费斯特定理:

$$\partial_t \langle \boldsymbol{P} \rangle = \langle \boldsymbol{F} \rangle, \tag{16.1}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是线性动量算符,$\boldsymbol{F} = -\nabla V$ 是力算符,(16.1)式是牛顿第二定律的量子版。若要把该定理推广到转动系统,即要求有一个有关角动量运动方程的量子力学版本,那就是广义的爱仑费斯特定理。

对于转动系统的经典角加速度方程:

$$\partial_t (\boldsymbol{I\omega}) = \boldsymbol{M}, \tag{16.2}$$

式中 I 是惯性矩,通常是一个张量,$\boldsymbol{\omega}$ 是角频率(一个轴矢量),$\boldsymbol{M}$ 是系统的力矩。(16.2)式也可写为

$$\boldsymbol{I\omega} = \boldsymbol{L}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}, \tag{16.3}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 是系统的角动量。以下举一个典型的例子以说明如何推导广义的爱仑费斯特定理。

一根长为 d 的均匀棒的两端各带正电 Q 与负电 Q,以棒的中

心为定点转动轴，亦即一个电偶极子在平面上转动，常数外电场为 $\boldsymbol{E}$，方向沿平面。所以电场力为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}Q$，转矩为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{F}$。

取转动平面为 x-y 平面，电场沿 x 方向，则系统的哈密顿为

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+V(\theta), \\
V(\theta) &= -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E} = -\cos\theta QEd,
\end{aligned} \tag{16.4}
$$

式中 $I=\frac{1}{12}Md^2$。对(16.4)式提出一个全量子力学算符形式的哈密顿量[138]：

$$H=\frac{\hbar^2}{2I}(a^\dagger a-b^\dagger b)^2-QEd\cos\Theta,$$

式中

$$\cos\Theta=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a-b^\dagger}{a^\dagger-b}}+\sqrt{\frac{a^\dagger-b}{a-b^\dagger}}\right), \tag{16.5}$$

$[a,a^\dagger]=1,[b,b^\dagger]=1$，它们是玻色算符。引入纠缠态表象：

$$\langle\eta| = \langle 0,0|\exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2+\eta^* a-\eta b+ab\right), \tag{16.6}$$

式中 $\eta=|\eta|e^{i\theta}$。则由

$$\langle\eta|(a^\dagger a-b^\dagger b)=i\frac{\partial}{\partial\theta}\langle\eta|, \tag{16.7}$$

可知 $L_z=a^\dagger a-b^\dagger b$ 是角动量算子，$\left[\frac{L_z}{\hbar},e^{i\Theta}\right]=e^{i\Theta}$，

$$\langle\eta|H=\left(-\frac{\hbar^2}{2I^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\cos\theta QEd\right)\langle\eta|, \tag{16.8}$$

这正好与(16.4)式一致。用海森堡方程可以导出角动量的运动方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}L_z=\frac{1}{i\hbar}[L_z,H]=-EQd\sin\Theta, \tag{16.9}$$

上式右边正好是系统的力矩，所以它正是广义的爱仑费斯特定理。可以继续导出

$$\partial_t e^{i\Theta}=i\frac{1}{2}(e^{i\Theta}\partial_t\Theta+\partial_t\Theta e^{i\Theta})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}, H]$$

$$= -\frac{1}{\partial \mathrm{i} I}(L_z \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} L_z)。 \tag{16.10}$$

由此可见角速度的方程为

$$\partial_t \Theta = \frac{L_z}{I}, \tag{16.11}$$

它与经典方程 $\boldsymbol{I\omega}=\boldsymbol{L}$ 一致。而角加速度方程为

$$\partial_t^2 \Theta = -\frac{1}{I} EQd \sin\theta, \tag{16.12}$$

它是经典方程$\partial_t(\boldsymbol{I\omega})=\boldsymbol{M}$ 的量子对应。以上讨论表明，用纠缠态表象可以导出广义爱仑费斯特定理。

16.2 从非简并参量放大器与纠缠态分析“不变本征算符法”求能级间隔[139]~[142]

量子光学中非简并参量放大器被用于实现参量下转换过程，其哈密顿量为

$$H_1 = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) + g(ab + a^\dagger b^\dagger)。 \tag{16.13}$$

由海森堡运动方程得

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a^\dagger &= [a^\dagger, H_1] = -\omega a^\dagger - gb, \\ \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b &= [b, H_1] = \omega b + ga^\dagger, \end{aligned} \tag{16.14}$$

故有

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^\dagger + b) = (\omega - g)(b - a^\dagger)。 \tag{16.15}$$

两边对 t 再微商一次，得

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(a^\dagger + b) = (\omega^2 - g^2)(a^\dagger + b)。 \tag{16.16}$$

如果把此式看作是一个本征方程，则 $a^\dagger + b$ 可视为“本征算符”

（相当于通常意义下本征态方程中的本征态），那么根据 $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\to H$ 代表薛定谔算符，就能悟出 ω^2-g^2 代表能级间隔的平方，因此

$$\Delta E_1=\sqrt{\omega^2-g^2},\tag{16.17}$$

它可以用对角化 H_1 的方法验证。由于 $a^\dagger+b$ 的本征态是一个纠缠态，所以它是与非简并参量放大器哈密顿量密切相关的一个态。

再分析一个角动量系统的哈密顿量：

$$H_2=f^*J_++fJ_-+gJ_z。\tag{16.18}$$

在角动量的玻色算符实现下，并用角动量的对易关系，可知

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}(a^\dagger+b)=[a^\dagger+b,H_2]=f^*(a-b^\dagger)-\frac{1}{2}g(a^\dagger+b)。\tag{16.19}$$

由

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}(a-b^\dagger)=[a-b^\dagger,H_2]=f(a^\dagger+b)+\frac{1}{2}g(a-b^\dagger),\tag{16.20}$$

可知

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a+b^\dagger)=-\left(|f|^2+\frac{g^2}{4}\right)(a+b^\dagger)。\tag{16.21}$$

与上例同样的考虑，可知该系统的能级间隔为

$$\Delta E_2=\frac{1}{2}\sqrt{4|f|^2+g^2}。\tag{16.22}$$

由于 $a+b^\dagger$ 的本征态是纠缠态，所以此系统的哈密顿与纠缠态密切相关。(16.22)式可以用对角化 H_2 的方法验证：选对角化的幺正算符

$$U\equiv\exp(\lambda^*J_+-\lambda J_-),\quad \lambda=|\lambda|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\tag{16.23}$$

则由

$$UJ_zU^{-1}=J_z\cos2|\lambda|-(\lambda^*J_++\lambda J_-)\frac{\sin2|\lambda|}{2|\lambda|},$$

$$U(\lambda^*J_++\lambda J_-)U^{-1}=(\lambda^*J_++\lambda J_-)\cos2|\lambda|+2|\lambda|J_2\sin2|\lambda|,\tag{16.24}$$

可以导出当参数λ选取得适当时，有

$$UH_2U^{-1} \to \sqrt{4|f|^2+g^2}J_z, \tag{16.25}$$

这与(16.22)式表示的能级间隔公式一致。

总结以上两例，可以看出：只要对某个系统找到某个算符O_e，它满足方程

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 O_e = kO_e, \tag{16.26}$$

式中k为正实数。那么，由海森堡方程得

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 O_e = [[O_e,H],H] = kO_e, \tag{16.27}$$

从而$\sqrt{k}$代表系统的能级间隔。上式可相比拟于能量本征方程$H^2\psi=E^2\psi$。为了进一步说明这一点，设$|c\rangle$与$|d\rangle$是哈密顿H的两个相邻能级的本征态，本征值为E_c与E_d，则由(16.27)式看到

$$\begin{aligned}\langle c|[[O_e,H],H]|d\rangle &= \langle c|(O_eH^2-2HO_eH+HO_e^2)|d\rangle \\ &= (E_d-E_c)^2\langle c|O_e|d\rangle = k\langle c|O_e|d\rangle。\end{aligned} \tag{16.28}$$

可见k确实是能级间隔值的平方。以上求本征能量的方法不同于直接求解薛定谔方程$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi$，而是在海森堡图像中进行的。故把此方法称为“不变本征算符法”。(16.27)式可以推广到n次微商的情况。

16.3 几个上述方法的例子

以下给出用“不变本征算符法”求能隙的几个较具体的例子

(1) 简并参量放大器。量子光学中常用简并参量放大器产生单模压缩光，哈密顿量是

$$H = \omega a^\dagger a + \mathrm{i}\lambda(a^2 - a^{\dagger 2})。 \tag{16.29}$$

发现$a+a^\dagger$是“不变本征算符”。因为

$$\left(\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2(a+a^\dagger)=[[a+a^\dagger,H],H]=(\omega^2-4\lambda^2)(a+a^\dagger),\tag{16.30}$$

所以能级间隔为

$$\Delta E=\sqrt{\omega^2-4\lambda^2}。\tag{16.31}$$

（2）两个弱耦合振子：

$$H=\omega(a^\dagger a+b^\dagger b)+\lambda(a^\dagger b+b^\dagger a)。\tag{16.32}$$

可以证明“不变本征算符”是 $a^\dagger\pm b^\dagger$，

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(a^\dagger\pm b^\dagger)=(\omega\pm\lambda)^2(a^\dagger\pm b^\dagger),\tag{16.33}$$

故相邻二能级间隔为

$$\Delta E=\omega\pm\lambda。\tag{16.34}$$

（3）存在运动耦合项的双原子分子系统。考虑有运动耦合项存在的双原子分子，其哈密顿量为

$$H=\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+kP_1P_2+V(x_1-x_2),\tag{16.35}$$

式中 $V(x_1-x_2)$ 是内键势，它只依赖于两个原子的间距，而 kP_1P_2 称为运动耦合。以下选

$$V(x_1-x_2)=\frac{\tau}{2}(x_1-x_2)^2,\tag{16.36}$$

则有

$$\begin{aligned}&[x_1,H]=\frac{\mathrm{i}P_1}{m_1}+\mathrm{i}kP_2,\quad [P_1,H]=-\mathrm{i}\tau(x_1-x_2),\\&[x_2,H]=\frac{\mathrm{i}P_2}{m_2}+\mathrm{i}kP_1,\quad [P_2,H]=\mathrm{i}\tau(x_1-x_2)。\end{aligned}\tag{16.37}$$

可见“不变本征算符”是

$$\hat{Q}_{3e}=x_1-x_2,\tag{16.38}$$

即

$$\left(\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_{3e}=\tau(x_1-x_2)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-2k\right)$$

$$=\frac{\tau}{\mu}(1-2\mu k)\hat{O}_{3e}, \tag{16.39}$$

式中 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 是系统的约化质量。由(16.39)式可知系统的能级间隔为

$$\Delta E_5=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}(1-2\mu k)}。 \tag{16.40}$$

这与用纠缠态表象的方法求解定态薛定谔方程的结果一致，而在这里只用了寥寥几步就得到了结论。

(4) 双原子分子的能级。另一类双原子分子的哈密顿量是

$$H=\frac{1}{2m}(P_1^2+P_2^2)+\frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2+x_2^2)-\lambda x_1x_2。 \tag{16.41}$$

由基本对易关系：

$$\begin{aligned}&[x_1,H]=\frac{\mathrm{i}P_1}{m},\quad [P_1,H]=-\mathrm{i}m\omega^2x_1+\mathrm{i}\lambda x_2,\\&[x_2,H]=\frac{\mathrm{i}P_2}{m},\quad [P_2,H]=-\mathrm{i}m\omega^2x_2+\mathrm{i}\lambda x_1,\end{aligned} \tag{16.42}$$

尝试设 $\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 的本征算符是

$$\hat{Q}_{4e}=x_1+gx_2, \tag{16.43}$$

又设能级差为 k，k 和 g 都待定。把(16.43)式代入(16.26)式，得

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_{4e}&=\left(\omega^2-\frac{\lambda g}{m}\right)x_1+\left(g\omega^2-\frac{\lambda}{m}\right)x_2\\&=k^2\hat{O}_{4e}。\end{aligned} \tag{16.44}$$

联立以上两式，可见

$$\frac{1}{\omega^2-\frac{\lambda g}{m}}=\frac{g}{g\omega^2-\frac{\lambda}{m}}\Rightarrow g=\pm 1。 \tag{16.45}$$

由此导出

$$\left(\omega^2-\frac{\lambda}{m}\right)=k^2,\quad g=1,$$

$$\left(\omega^2+\frac{\lambda}{m}\right)=k^2,\quad g=-1,\tag{16.46}$$

因此能级间隔是

$$k=\sqrt{\left(\omega^2\pm\frac{\lambda}{m}\right)}。\tag{16.47}$$

(5) 三原子分子的能级。三原子分子处于一直线上，其哈密顿量是

$$H=\frac{P_1^2}{2m}+\frac{P_2^2}{2M}+\frac{P_3^2}{2m}+\frac{\tau}{2}(x_2-x_1-b)^2+\frac{\tau}{2}(x_3-x_2-b)^2。\tag{16.48}$$

鉴于

$$[x_1,H]=\frac{\mathrm{i}P_1}{m},\quad [P_1,H]=\mathrm{i}\tau(x_2-x_1-b),$$

$$[x_2,H]=\frac{\mathrm{i}P_2}{M},\quad [P_2,H]=-\mathrm{i}\tau(x_2-x_1-b)+\mathrm{i}\tau(x_3-x_2-b),$$

$$[x_3,H]=\frac{\mathrm{i}P_3}{m},\quad [P_3,H]=-\mathrm{i}\tau(x_3-x_2-b),\tag{16.49}$$

设不变算符是

$$\hat{O}_{5e}=x_1+fx_2+g'x_3,\tag{16.50}$$

又假定能级间隔为 k，k 和 g'，f 都待定。把(16.50)式代入(16.26)式，得

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_{5e}=\tau\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{f}{M}\right)x_1+\left(-\frac{1}{m}+\frac{2f}{M}-\frac{g'}{m}\right)x_2+\left(\frac{g'}{m}-\frac{f}{M}\right)x_3\right]=k^2\hat{O}_{5e}。\tag{16.51}$$

比较以上两式，可见它们相应的系数必须成比例，即

$$1:f:g'=\left(\frac{1}{m}-\frac{f}{M}\right):\left(-\frac{1}{m}+\frac{2f}{M}-\frac{g'}{m}\right):\left(\frac{g'}{m}-\frac{f}{M}\right)。\tag{16.52}$$

此方程有三种可能的解：

$$(f,g')=(0,-1),\quad (f,g')=(-2,1),\quad (f,g')=\left(\frac{M}{m},1\right)。\tag{16.53}$$

把(16.33)式代入(16.31)式，分别得

$$k_1=\sqrt{\frac{\tau}{m}},\quad k_2=\sqrt{\frac{\tau}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)},\quad k_3=0。\tag{16.54}$$

故能级间隔有两种可能性：

$$k_1=\sqrt{\frac{\tau}{m}},\quad k_2=\sqrt{\frac{\tau}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}。\tag{16.55}$$

从以上几例分析，可以看到由于在海森堡图像中态矢量是不随时间改变的，因此在此图像中用海森堡方程讨论$\left(\frac{\mathrm{id}}{\mathrm{d}t}\right)^2$的“本征算子”，所得到的“本征值”就对应能级的间隔。

16.4　在相互作用图像中分析“不变本征算符法”

讨论了上述内容之后，一个饶有兴趣的问题随之产生了：在相互作用图像中如何使用“不变本征算符”呢？为此仍先考虑哈密顿量 $H_0=\omega a^{\dagger}a$ 的情况。由海森堡方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[a,H_0]=-\mathrm{i}\omega a,\tag{16.56}$$

这是一个一阶“本征算符”方程，其解 $a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}a(0)$ 告诉我们湮灭算符携带一个负频因子，即丢掉一份 $\hbar\omega$ 的能量是由算符 a 完成的。注意到相对于谐振子而言，$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 有一个“本征算符”$(a^2-a^{\dagger 2})$，即

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2(a^2-a^{\dagger 2})&=\mathrm{i}2\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^2+a^{\dagger 2})\\&=2\omega[(a^2+a^{\dagger 2}),\omega a^{\dagger}a]\\&=4\omega^2(a^2-a^{\dagger 2}),\end{aligned}\tag{16.57}$$

此方程的解为

$$(a^2 - a^{\dagger 2}) = [a^2(0) - a^{\dagger 2}(0)]e^{-2i\omega t}。 \tag{16.58}$$

这说明丢掉两份能量 $2\hbar\omega$ 是由 $(a^2 - a^{\dagger 2})$ 来实现的。这使我们想起频率为 ω 的信号可以用泵浦处于振动频率为 2ω 的非线性晶体加以放大，所以从求 $\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 的"本征算符"的过程中可以悟出怎样去构造较复杂的哈密顿量，即在本例的情况下要构造简并参量放大器的哈密顿量，必须包括 $(a^2 - a^{\dagger 2})$ 项。事实上，文献[5]中已给出一类光场与非线性介质的相互作用：

$$H_1 = \omega a^{\dagger} a + \mathrm{i}\lambda(a^2 e^{2i\omega t} - a^{\dagger 2} e^{-2i\omega t})。 \tag{16.59}$$

把 H_1 分解为自由部分与相互作用部分：

$$H_1 = H_{10} + V_1 \tag{16.60}$$

式中，$H_{10} = \omega a^{\dagger} a$，$V_1 = \mathrm{i}\lambda(a^2 e^{2i\omega t} - a^{\dagger 2} e^{-2i\omega t})$。进入到相互作用图像：

$$V_1^{(I)} = \exp(\mathrm{i}\omega a^{\dagger} a) V_1 \exp(-\mathrm{i}\omega a^{\dagger} a) = \mathrm{i}\lambda(a^2 - a^{\dagger 2}), \tag{16.61}$$

则根据相互作用图像中的算符演化方程，得

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_1^{(I)} &= [V_1^{(I)}, H_{10}] = 2\omega\lambda(a^2 + a^{\dagger 2}), \\ \left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 V_1^{(I)} &= 4\omega^2 V_1^{(I)}。 \end{aligned} \tag{16.62}$$

因此 $V_1^{(I)}$ 本身就是 $\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 的"本征算符"。但需要十分注意的是，在相互作用图像中态矢量不是固定不变的，其演化方程是

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi, t\rangle^{(I)} = V_1^{(I)} |\psi, t\rangle^{(I)}, \tag{16.63}$$

或是

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1(t,0) &= V_1^{(I)}(t) u_1(t,0), \\ u(t,0) |\psi, 0\rangle &= |\psi, t\rangle^{(I)}, \end{aligned} \tag{16.64}$$

所以(16.62)式中的 $4\omega^2$ 并不代表系统的能级差，$\sqrt{4\omega^2}=2\omega$ 只是表示 $V_1^{(\mathrm{I})}$ 是在 2ω 的频率下起作用，同时态矢的演化受

$$u_1(t,0)=\exp[\mathrm{i}\lambda t(a^2-a^{\dagger 2})] \tag{16.65}$$

支配。

以上讨论可以推广到二维谐振子的情况，其哈密顿量为 $H_{20}=\omega_1 a^\dagger a+\omega_2 b^\dagger b$。在这种情况下，由

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ab-a^\dagger b^\dagger)&=[(ab-a^\dagger b^\dagger),(\omega_1 a^\dagger a+\omega_2 b^\dagger b)]\\&=\omega_3(ab+a^\dagger b^\dagger),\end{aligned} \tag{16.66}$$

式中 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$，以及

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2(ab-a^\dagger b^\dagger)=\omega_3^2(ab-a^\dagger b^\dagger), \tag{16.67}$$

其解为

$$(ab-a^\dagger b^\dagger)=[a(0)b(0)-a^\dagger(0)b^\dagger(0)]\exp(-\mathrm{i}\omega_3 t)。 \tag{16.68}$$

可说明丢失能量 $\hbar\omega_3$ 是由算符 $(ab-a^\dagger b^\dagger)$ 来实现的。这使人们想起处于频率为 ω_3 的经典平面光波在非线性介质中转化为出射频率各为 ω_1 与 ω_2 的两束光的过程，其哈密顿量为

$$H_2=\omega_1 a^\dagger a+\omega_2 b^\dagger b+\mathrm{i}g[ab\exp(\mathrm{i}\omega_3 t)-a^\dagger b^\dagger\exp(-\mathrm{i}\omega_3 t)]。 \tag{16.69}$$

转入相互作用图像中讨论，则令

$$H_2=H_{20}+V_2,V_2=\mathrm{i}g[ab\exp(\mathrm{i}\omega_3 t)-a^\dagger b^\dagger\exp(-\mathrm{i}\omega_3 t)], \tag{16.70}$$

就有

$$V_2^{(\mathrm{I})}=\mathrm{i}g(ab-a^\dagger b^\dagger), \tag{16.71}$$

它是 $\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 的“本征算符”：

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 V_2^{(\mathrm{I})}=\omega_3^2 V_2^{(\mathrm{I})}。 \tag{16.72}$$

由于在相互作用图像中态矢量也是演变的，所以这里 ω_3 并不代表系统的能量或能级差值，而只是说明 $V_2^{(\mathrm{I})}$ 是在处于频率为 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ 的状况下起作用，这时态矢的演化受

$$u_2(t,0)=\exp[\mathrm{i}gt(ab-a^\dagger b^\dagger)] \tag{16.73}$$

支配。

另一方面，根据海森堡不确定原理：当两个厄米特算符 A 和 B 的对易子为

$$[A,B]=\mathrm{i}C, \tag{16.74}$$

则 A 与 B 的均方差之积满足关系：

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2\geqslant\langle F\rangle^2+\left(\frac{1}{2}\langle C\rangle\right)^2, \tag{16.75}$$

式中 $(\Delta A)^2=\int\psi^*(A-\langle A\rangle)^2\psi\mathrm{d}\tau$，算符与态矢都是在相互作用图像中定义的，

$$F=\frac{1}{2}[(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)+(B-\langle B\rangle)(A-\langle A\rangle)]。 \tag{16.76}$$

设 A 为自由哈密顿量 $H_0^{(\mathrm{I})}$，B 为相互作用 $V^{(\mathrm{I})}$，则有

$$(\Delta V^{(\mathrm{I})})^2(\Delta H_0^{(\mathrm{I})})^2\geqslant\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\langle[V^{(\mathrm{I})},H_0^{(\mathrm{I})}]\rangle\right]^2。 \tag{16.77}$$

在以上两个例子中，根据相互作用图像中的算符运动方程：

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V^{(\mathrm{I})}=[V^{(\mathrm{I})},H_0], \tag{16.78}$$

所以(16.77)式可改写为

$$(\Delta V^{(\mathrm{I})})^2(\Delta H_0^{(\mathrm{I})})^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V^{(\mathrm{I})}\rangle\right)^2。 \tag{16.79}$$

由(16.70)式可知

$$\Delta(V_2^{(\mathrm{I})})^2(\Delta H_{20}^{(\mathrm{I})})^2\geqslant\left[\frac{1}{2}g\omega_3\langle(ab+a^\dagger b^\dagger)\rangle\right]^2。 \tag{16.80}$$

而由(16.62)式，可得

$$\Delta(V_1^{(\mathrm{I})})^2(\Delta H_{10})^2\geqslant[\omega\lambda\langle(a^2+a^{\dagger 2})\rangle]^2。 \tag{16.81}$$

在形式上还可以把(16.62)式与(16.72)式改写为以下样子：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_i^{(\mathrm{I})}=\lambda_i\int V_i^{(\mathrm{I})}\mathrm{d}t+C_i,\qquad(16.82)$$

式中 C_i 是积分常数，而 λ_i 是 $\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 相对于 H_{i0} 的“本征值”。

16.5　用“不变本征算符法”求若干耦合振子的振动模式

在量子光学中，单模压缩态可以由以下哈密顿量产生

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2+k(PQ+QP),\qquad(16.83)$$

$[Q,P]=\mathrm{i}(\hbar=1)$。认定不变本征算符是

$$O_e=\lambda Q+\nu P,\qquad(16.84)$$

式中 λ,ν 是未定常数。由于

$$\begin{aligned}[Q,H]&=\frac{\mathrm{i}P}{m}+2\mathrm{i}kQ,\\ [P,H]&=-m\omega^2Q-2\mathrm{i}kP,\end{aligned}\qquad(16.85)$$

故有

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_e=[O_e,H]=\mathrm{i}\lambda\left(\frac{P}{m}+2Qk\right)-\mathrm{i}\nu(m\omega^2Q+2kP)。\qquad(16.86)$$

由此进一步导出

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2O_e=[[O_e,H],H]=(\omega^2-4k^2)O_e,\qquad(16.87)$$

所以 H 的能级间隔是 $\sqrt{\omega^2-4k^2}$。

把上法推广到 N 个恒等振子的最近邻耦合模型，第一个振子与第 N 个振子首尾相接形成环状，其哈密顿量是

$$H_{环}=\frac{1}{2m}\sum_{l=1}^{N}P_l^2+\frac{\beta}{2}\sum_{l=1}^{N}(Q_l-Q_{l-1})^2。\qquad(16.88)$$

由于成环状，可认为

$$P_{N+l}=P_l,\quad Q_{N+l}=Q_l,$$

每一个振子所处的环境相同。当 N 趋于很大时，在环上局部看，就是一个存在玻恩-冯·卡门边界条件的一维长链。认定 $H_{环}$ 的不变本征算符是

$$F_l=\sum_{j=1}^{N}P_j\cos j\theta_l, \tag{16.89}$$

式中

$$\theta_l=\frac{2\pi}{N}(l-1),\quad l=1,2,3,\cdots,N。 \tag{16.90}$$

由于

$$[P_j,H_{环}]=\mathrm{i}\beta\hbar(Q_{j+1}+Q_{j-1}-2Q_j), \tag{16.91}$$

由周期性可知

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_l&=[F_l,H_{环}]\\&=-\mathrm{i}\beta\hbar\sum_{j=1}^{N}Q_j[2\cos j\theta_l-\cos(j+1)\theta_l-\cos(j-1)\theta_l]\\&=-4\mathrm{i}\beta\sum_{j=1}^{N}Q_j\sin^2\frac{\theta_l}{2}\cos j\theta_l\\&=-2\mathrm{i}\beta\hbar(1-\cos\theta_l)\sum_{j=1}^{N}Q_j\cos j\theta_l。\end{aligned} \tag{16.92}$$

再由

$$[Q_j,H_{环}]=\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}P_j, \tag{16.93}$$

可得

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2F_l=[[F_l,H_{环}],H_{环}]=\frac{2\beta\hbar^2}{m}(1-\cos\theta_l)F_l。 \tag{16.94}$$

可确定 F_l 是 $H_{环}$ 的不变本征算符，$H_{环}$ 的能级间隔为

$$\hbar\sqrt{\frac{2\beta}{m}(1-\cos\theta_l)}。$$

这与一维晶格振动的声子谱相同。由此可见，晶格振动可以用 $H_{环}$ 的振动谱来描写。在书 I 中曾经用对角化的方法求 $H_{环}$ 的能谱，但它比现在的方法复杂得多了。

16.6 用“不变本征算符法”求双原子线性链的声学支和光学支

考虑一个有 $2N$ 个原子的线性链，它有 N 个元胞，每个长度为 $2d$，并具有周期性边界条件。在这条链上有两类原子，其质量分别为 M 与 M'，它们相间地分布在链上，其振动势能为

$$V = \sum_{n=1}^{N} \Lambda(u_n - u_n')^2 + \Lambda(u_n' - u_{n+1})^2, \tag{16.95}$$

式中 u_n 是第 n 个原子(属第一类)偏离平衡位置的位移，u_n' 是属第二类原子的位置偏离。原子振动所满足的牛顿方程为

$$\begin{aligned} M\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} &= \Lambda(u_n' + u_{n-1}' - 2u_n), \\ M'\frac{\partial^2 u_n'}{\partial t^2} &= \Lambda(u_{n+1} + u_n - 2u_n')。 \end{aligned} \tag{16.96}$$

由周期性结构，可以认为每个同类原子的振动有相同的最大振幅，但不同类的原子其振幅极大值不同。设

$$\begin{aligned} u_n &= \xi \exp i(2nqa - \bar{\omega} t), \\ u_n' &= \xi' \exp i[2(n+1)qa - \bar{\omega} t]。 \end{aligned} \tag{16.97}$$

把(16.97)式代入(16.96)式，得到

$$-M\bar{\omega}^2\xi = \Lambda\{\xi'[\exp(iqa) + \exp(-iqa)] - 2\xi\}, \tag{16.98}$$

$$-M'\bar{\omega}^2\xi' = \Lambda\{\xi[\exp(iqa) + \exp(-iqa)] - 2\xi'\}。 \tag{16.99}$$

由此导出

$$\bar{\omega}_{\pm}^2(q) = \Lambda\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right) \pm \Lambda\left[\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right)^2 - \frac{4\sin^2 qa}{MM'}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{16.100}$$

以及

$$\frac{\xi}{\xi'}=\frac{2\Lambda\cos qa}{2\Lambda-M\bar{\omega}^2}=\frac{2\Lambda-M'\bar{\omega}^2}{2\Lambda\cos qa}。\tag{16.101}$$

(16.100)式中含两个解，与 $\bar{\omega}_-$ 有关的称为声学模，表示原子在任意时刻的同向运动；而 $\bar{\omega}_+$ 代表固体振动的光学模，表示不同种类的原子以相反的方向运动。

本节要建立一个双原子线性链的全量子模型，并用“不变本征算符法”简捷地推导出相应的光学支和声学支，该量子哈密顿量是

$$H=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{P_n^2}{2m}+\frac{P'^2_n}{2m'}+\frac{\beta}{2}(x_n-x'_n)^2+\frac{\beta}{2}(x'_n-x_{n+1})^2\right],\tag{16.102}$$

式中坐标、动量算符满足 $[x_n,P_{n'}]=\mathrm{i}\delta_{n,n'}(\hbar=1)$，$x_n$ 与 x'_n 分别代表类型Ⅰ与类型Ⅱ原子的位移，P_n 与 P'_n 是相应的动量。设不变本征算符是

$$F=\sum_{n=1}^{N}(f_nP_n+f'_nP'_n),\tag{16.103}$$

式中 f_n 与 f'_n 是待定系数，则由(16.27)式，期望 F 满足方程

$$[[F,H],H]=\bar{\omega}^2F。\tag{16.104}$$

由

$$\begin{aligned}[P_n,x_j]&=[P'_n,x'_j]=-\mathrm{i}\delta_{j,n},\\ [P_n,P'_j]&=[x_n,x'_j]=[P_n,x'_j]=[P'_n,x_j]\\ &=[P_n,P_j]=[x_n,x_j]=0,\end{aligned}\tag{16.105}$$

可得

$$\begin{aligned}[P_n,H]&=\left[P_n,\frac{\beta}{2}(x_n-x'_n)^2+\frac{\beta}{2}(x_n-x'_{n-1})^2\right]\\ &=\mathrm{i}\beta(x'_n+x'_{n-1}-2x_n),\end{aligned}\tag{16.106}$$

以及

$$[x_n,H]=\left[x_n,\frac{P_n^2}{2m}\right]=\frac{\mathrm{i}}{m}P_n。\tag{16.107}$$

类似地，由

$$[P'_n, H] = \mathrm{i}\beta(x_n + x_{n+1} - 2x'_n),$$
$$[x'_n, H] = \frac{\mathrm{i}}{m'}P'_n, \tag{16.108}$$

得到

$$[F, H] = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{i}\beta[(f'_n + f'_{n-1} - 2f_n)x_n + (f_n + f_{n+1} - 2f'_n)x'_n], \tag{16.109}$$

因此有

$$[[F, H], H] = \sum_{n=1}^{N}\Big[-\frac{\beta}{m}(f'_n + f'_{n-1} - 2f_n)P_n - \frac{\beta}{m'}(f_n + f_{n+1} - 2f'_n)P'_n\Big]。\tag{16.110}$$

将上式与(16.104)式比较，得到

$$\bar{\omega}^2 = \frac{-\beta(f'_n + f'_{n-1} - 2f_n)}{mf_n} = \frac{-\beta(f_n + f_{n+1} - 2f'_n)}{m'f'_n}, \tag{16.111}$$

因而

$$\frac{1}{m}\Big(1 - \frac{f'_n + f'_{n-1}}{2f_n}\Big) = \frac{1}{m'}\Big(1 - \frac{f_n + f_{n+1}}{2f'_n}\Big), \quad n = 1, 2, \cdots, N。\tag{16.112}$$

分析此方程，可确定 f_n 与 f'_n 的形式为

$$f_n = \xi\cos 2n\theta_l,$$
$$f'_n = \xi'\cos(2n+1)\theta_l, \tag{16.113}$$

式中

$$\theta_l = \frac{l}{N}\pi, \quad l = 1, 2, \cdots, 2N。\tag{16.114}$$

ξ 与 ξ' 将在下面确定。把(16.113)式代入(16.111)式，可看出

$$\bar{\omega}^2 = \frac{2\beta}{m}\Big(1 - \frac{\xi'}{\xi}\cos\theta_l\Big) = \frac{2\beta}{m'}\Big(1 - \frac{\xi}{\xi'}\cos\theta_l\Big), \tag{16.115}$$

从而有

$$\frac{\xi'}{\xi}=\frac{2\beta\cos\theta_l}{2\beta-m'\bar{\omega}^2}=\frac{2\beta-m\bar{\omega}^2}{2\beta\cos\theta_l}。\tag{16.116}$$

由(16.116)式可导出方程

$$m'\bar{\omega}^4-2\beta(m+m')\bar{\omega}^2+4\beta^2\sin^2\theta_l=0,\tag{16.117}$$

其解为

$$\bar{\omega}_{\pm}=\left\{\beta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\pm\beta\left[\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)^2-\frac{4\sin^2\theta}{mm'}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{16.118}$$

它与(16.100)式自洽。可见以上建立的全量子哈密顿模型是正确的。从(16.103)式及(16.113)式可知,不变本征算符的明显形式是

$$F=\sum_{n=1}^{N}[\xi P_n\cos 2n\theta_l+\xi' P'_n\cos(2n+1)\theta_l]。\tag{16.119}$$

这样就十分简捷地从全量子论的双原子线性链模型导出了振动模式,而以前文献中出现的有关论述全都是经典模型。

16.7　关于自旋系统的"不变本征算符"

"不变本征算符法"也适合于某些自旋系统。设一个带自旋,电荷为 e,质量为 m 的粒子置于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴)中,哈密顿量为

$$H'=\frac{eBS_x}{mc},\tag{16.120}$$

式中 c 是光速,$S_i(i=x,y,z)$是自旋算符,满足对易关系$[S_x,S_y]=\mathrm{i}S_z$。由海森堡方程导出

$$\frac{\mathrm{d}S_y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathrm{i}}[S_y,H']=-2\Omega' S_z,$$

$$\Omega'=\frac{eB}{2mc},\tag{16.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathrm{i}}[S_z,H']=2\Omega' S_y。$$

由此给出

$$\frac{\mathrm{d}^2 S_y}{\mathrm{d}t}=-2\Omega'\frac{\mathrm{d}S_z}{\mathrm{d}t}=4\Omega'^2 S_y。\tag{16.122}$$

所以对于 H'而言,不变本征算符是 S_y,能级间隔为 2Ω。

再考虑两个自旋为$\frac{1}{2}$的相互作用系统,哈密顿量是

$$\mathscr{H}=A\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2,\tag{16.123}$$

式中 A 是耦合常数。由

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{S}_1,\mathscr{H}]&=-\mathrm{i}A\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2,\\ [\boldsymbol{S}_2,\mathscr{H}]&=\mathrm{i}A\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2,\end{aligned}\tag{16.124}$$

得到

$$[\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2,\mathscr{H}]=-2\mathrm{i}A\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2,\tag{16.125}$$

于是

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2(\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2)=[[\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2,\mathscr{H}],\mathscr{H}]=A^2(\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2)。\tag{16.126}$$

因为不变本征算符为 $\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2$,故能级间隔为 A。

16.8 用"赝不变本征算符法"求 Jaynes-Cummings 模型的能级差

描述光场与原子相互作用的最简单模型是 Jaynes-Cummings 模型,其哈密顿量是

$$H=\bar{\omega}a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\Omega\sigma_z+k(\sigma_+a+a^{\dagger}\sigma_-),\tag{16.127}$$

式中 Ω 是二能级原子的跃迁频率,$\bar{\omega}$ 是光场频率,k 是光与原子的耦合常数,$a^{\dagger}$ 与 a 是光场的产生和湮灭算符,$\sigma_{\pm}$ 是泡利自旋算符:

$$\sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad\sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\tag{16.128}$$

它们遵守规则：

$$[\sigma_z,\sigma_\pm]=\pm 2\sigma_\pm,\quad [\sigma_+,\sigma_-]=\sigma_z。\tag{16.129}$$

对于这个模型，是否也能用不变本征算符求其能级差呢?

试回顾在文献[143]中曾用超对称生成元构造的超对称幺正变换来对角化哈密顿量。这些生成元为

$$\begin{aligned} a^\dagger\sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \equiv Q, \\ \sigma_+ a &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv Q^\dagger, \end{aligned}\tag{16.130}$$

$$\begin{aligned} N &= a^\dagger a+\frac{1}{2}\sigma_z+\frac{1}{2}=\begin{bmatrix} aa^\dagger & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{bmatrix}, \\ N^{-\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{aa^\dagger}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{a^\dagger a}} \end{bmatrix}, \end{aligned}\tag{16.131}$$

它们满足以下对易关系和反对易关系：

$$\begin{aligned} &Q^2=0=Q^{\dagger 2},\quad [Q^\dagger,Q]=N\sigma_z,\quad \{Q,\sigma_z\}=\{Q^\dagger,\sigma_z\}=0, \\ &N=\{Q,Q^\dagger\},\quad [N,Q]=[N,Q^\dagger]=0,\quad (Q^\dagger-Q)^2=-N, \\ &[N^{-\frac{1}{2}},Q]=[N^{-\frac{1}{2}},Q^\dagger]=0, \end{aligned}\tag{16.132}$$

式中$\{\ ,\ \}$代表反对易子。称$(N,Q,Q^\dagger)$组成了超对称生成元集合，用它们可以改写 H：

$$H=\bar{\omega}N+\frac{\Delta}{2}\sigma_z+k(Q+Q^\dagger)-\frac{\bar{\omega}}{2},\tag{16.133}$$

式中 $\Delta\equiv\Omega-\bar{\omega}$。假定 H 的不变本征算符形式为[144]

$$\hat{O}_e=f(Q^\dagger+Q)+g\sigma_z,\tag{16.134}$$

式中 f 与 g 为待定常数。由对易关系(16.132)式可知

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{O}_e=[\hat{O}_e,H]=(f\Delta-2kg)(Q-Q^\dagger),\tag{16.135}$$

再微商一次，得到

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_e=[[\hat{O}_e,H],H]=(f\Delta-2kg)[\Delta(Q^{\dagger}+Q)-2kN\sigma_z]。\tag{16.136}$$

比较(16.134)式与(16.136)式的右边,可见它们二者难以成比例。

因为 σ_z 与 $N\sigma_z$ 不同,所以(16.134)式中的 $\hat{O}_e$ 似乎不是不变本征算符。但是若在 N 的本征矢量空间中可以用其本征值代表 N,那么就可在此意义下认为 $f(Q^{\dagger}+Q)+g\sigma_z$ 与 $\Delta(Q^{\dagger}+Q)-2kN\sigma_z$ 可以比拟。N 的本征矢是

$$\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix}=(\uparrow,|n\rangle),\quad\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix}=(\downarrow,|n+1\rangle),\tag{16.137}$$

它们是 Fock 态与原子态(用自旋矩阵表示)的直积,式中

$$|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad|\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}。\tag{16.138}$$

N 的本征值是

$$N\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix}=\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\sigma_z+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix}=(n+1)\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix},$$
$$N\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix}=(n+1)\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix},\tag{16.139}$$

把(16.136)式两边作用到本征矢上,得

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_e\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix}=(f\Delta-2kg)[\Delta(Q^{\dagger}+Q)-2k(n+1)\sigma_z]\begin{pmatrix}|n\rangle\\0\end{pmatrix},$$
$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_e\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix}=(f\Delta-2kg)[\Delta(Q^{\dagger}+Q)-2k(n+1)\sigma_z]\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix}。\tag{16.140}$$

在这种情形下,比较(16.134)式与 $\Delta(Q^{\dagger}+Q)-2k(n+1)\sigma_z$,得到比例关系:

$$\frac{f}{g}=\frac{\Delta}{-2k(n+1)}。\tag{16.141}$$

即

$$f=-\frac{\Delta}{2k(n+1)}g。\tag{16.142}$$

代入(16.134)式，得

$$\hat{O}_e=-\frac{\Delta}{2k(n+1)}g(Q^{\dagger}+Q)+g\sigma_z。\tag{16.143}$$

把(16.140)式右边与$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{O}_e=\lambda\hat{O}_e$ 比较，得

$$[\Delta^2+4k^2(n+1)]\left[-\frac{\Delta}{2k(n+1)}g(Q^{\dagger}+Q)+g\sigma_z\right]=\lambda\hat{O}_e,\tag{16.144}$$

即

$$\Delta^2+4k^2(n+1)=\lambda。\tag{16.145}$$

令

$$\frac{2k}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\tan\theta,\tag{16.146}$$

故能级差是

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\Delta}{\cos\theta}。\tag{16.147}$$

由于这里的 $\hat{O}_e$ 的正确性是在 N 的本征态空间中理解的，所以称之为“赝不变本征算符”。

(16.147)式的正确性可以通过对角化 H 的途径来验证。如书Ⅰ中介绍的那样，引入由超对称生成元组成的幺正变换算符[145]、[146]

$$T=\exp\left[-\frac{\theta}{2}N^{-\frac{1}{2}}(Q^{\dagger}-Q)\right],\tag{16.148}$$

用关系式(16.132)可以把 T 展开为

$$T=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k}(-1)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^{2k-1}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{N}}(Q^{\dagger}-Q)\right]^{2k-1}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}(Q^{\dagger} - Q), \qquad (16.149)$$

由此导出

$$T^{-1}(Q+Q^{\dagger})T = \cos\theta(Q+Q^{\dagger}) + \sin\theta\frac{1}{\sqrt{N}}[Q^{\dagger}, Q]。 \qquad (16.150)$$

注意到

$$(Q^{\dagger} - Q)\sigma_z = -\sigma_z(Q^{\dagger} - Q) = -(Q+Q^{\dagger}), \qquad (16.151)$$

以及

$$T^{-1}\sigma_z T = \sigma_z T^2 = \frac{1}{N}[Q^{\dagger}, Q]\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{N}}(Q+Q^{\dagger})\sin\theta, \qquad (16.152)$$

用 T 变换可将 H 对角化为

$$T^{-1}HT = \bar{\omega}N + \left(k\cos\theta - \frac{\Delta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sin\theta\right)(Q+Q^{\dagger}) + \left(k\sin\theta + \frac{\Delta}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\cos\theta\right)\frac{1}{\sqrt{N}}[Q^{\dagger}, Q] - \frac{\bar{\omega}}{2}, \qquad (16.153)$$

当 θ 取值满足下式时，

$$\frac{2k}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{N}}\tan\theta, \qquad (16.154)$$

(16.153)式变为

$$T^{-1}HT = \bar{\omega}N + \frac{\Delta}{2\cos\theta}\sigma_z - \frac{\bar{\omega}}{2}。 \qquad (16.155)$$

注意(16.154)式也是在 N 的本征矢量空间中理解的。由(16.155)式导出

$$T^{-1}HT\begin{pmatrix} |n\rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\bar{\omega}(n+1) + \frac{\Delta}{2\cos\theta} - \frac{\bar{\omega}}{2}\right]\begin{pmatrix} |n\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (16.156)$$

$$T^{-1}HT\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix}=\left[\bar{\omega}n-\frac{\Delta}{2\cos\theta}+\frac{\bar{\omega}}{2}\right]\begin{pmatrix}0\\|n+1\rangle\end{pmatrix},\tag{16.157}$$

所以这两个态之间的能级差是$\frac{\Delta}{\cos\theta}$，与(16.147)式相同。这样就验证了以上赝不变本征算符方法是正确的。值得指出的是，文献[147]曾用幺正算符对角化 J-C 模型哈密顿量，但未用超对称语言。

16.9　不同耦合强度的双原子线性链的新声学支和光学支

当 16.6 节中双原子线性链中每个原子与其左邻右舍的耦合常数不同时，(16.102)式所示的哈密顿算符修正为

$$H=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{P_n^2}{2m}+\frac{P_n'^2}{2m'}+\frac{\beta}{2}(x_n-x_n')^2+\frac{\beta'}{2}(x_n'-x_{n+1})^2\right]。\tag{16.158}$$

注意，这里的$\beta\neq\beta'$。由以下的对易关系：

$$[P_n,H]=-\mathrm{i}(\beta+\beta')x_n+\mathrm{i}(\beta x_n'+\beta' x_{n-1}'),$$

$$[P_n',H]=-\mathrm{i}(\beta+\beta')x_n'+\mathrm{i}(\beta x_n+\beta' x_{n-1}),$$

$$[x_n,H]=\frac{\mathrm{i}}{m}P_n,$$

$$[x_n',H]=\frac{\mathrm{i}}{m'}P_n',$$

$$[[P_n,H],H]=\frac{\beta+\beta'}{m}P_n-\frac{1}{m'}(\beta P_n'+\beta' P_{n-1}'),$$

$$[[P_n',H],H]=\frac{\beta+\beta'}{m'}P_n'-\frac{1}{m}(\beta P_n+\beta' P_{n-1}),$$

并引入算符

$$F = \sum_{n=1}^{N} (f_n P_n + f'_n P'_n), \tag{16.159}$$

其中计入周期边界条件,令

$$f_n = \xi \cos 2n\theta_l, \quad f'_n = \xi' \cos(2n+1)\theta_l, \tag{16.160}$$

式中 $\theta_l = \frac{l\pi}{N}, l = 1, 2, \cdots, N$。计算得

$$\begin{aligned}
[[F, H], H] = & \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \frac{P_n}{m} (\xi A \cos 2n\theta_l - \xi' A \cos \theta_l \cos 2n\theta_l \\
& + \xi' \Lambda \sin \theta_l \sin 2n\theta_l) + \frac{P'_n}{m'} [\xi' A \cos(2n+1)\theta_l \\
& - \xi A \cos \theta_l \cos(2n+1)\theta_l - \xi \Lambda \sin \theta_l \sin(2n+1)\theta_l] \Big\} \\
= & A \sum_{n=1}^{N} \Big[\frac{1}{m} (\xi - \xi' \cos \theta_l) P_n \cos 2n\theta_l + \frac{1}{m'} (\xi' - \xi \cos \theta_l) \\
& \cdot P'_n \cos(2n+1)\theta_l \Big] + G\Lambda \sin \theta_l,
\end{aligned} \tag{16.161}$$

式中

$$A = \beta + \beta', \quad \Lambda = \beta - \beta', \tag{16.162}$$

$$G \equiv \sum_{n=1}^{N} \Big[\frac{\xi'}{m} P_n \sin 2n\theta_l - \frac{\xi}{m'} P'_n \sin(2n+1)\theta_l \Big]。 \tag{16.163}$$

比较(16.159)式与(16.163)式可见,若选择 ξ 与 ξ',使得

$$\frac{\frac{A}{m}(\xi - \xi' \cos \theta_l)}{\xi} = \frac{\frac{A}{m'}(\xi' - \xi \cos \theta_l)}{\xi'}, \tag{16.164}$$

则(16.161)式可简化为

$$[[F, H], H] = \lambda_1 F + G\Lambda \sin \theta_l, \tag{16.165}$$

式中

$$\lambda_1 = A\Big(\frac{1}{m} - \frac{\xi'}{m\xi} \cos \theta_l\Big) = A\Big(\frac{1}{m'} - \frac{\xi}{m'\xi'} \cos \theta_l\Big)。 \tag{16.166}$$

由(16.164)式得

$$\frac{\xi}{\xi'}=\frac{m-m'\pm\sqrt{(m-m')^2+4mm'\cos^2\theta_l}}{2m\cos\theta_l} \tag{16.167}$$

所以

$$\lambda_1=\frac{A}{2mm'}\left[m+m'\mp\sqrt{(m-m')^2+4mm'\cos^2\theta_l}\right]。 \tag{16.168}$$

由(16.163)式与(16.167)式，可进一步算出

$$\begin{aligned}[[G,H],H]=&A\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\xi'}{m}+\frac{\xi}{m'}\cos\theta_l\right)P_n\sin 2n\theta_l\right.\\&\left.-\frac{1}{m'}\left(\frac{\xi}{m'}+\frac{\xi'}{m}\cos\theta_l\right)P'_n\sin(2n+1)\theta_l\right]\\&+\frac{\Lambda}{mm'}\sin\theta_l\sum_{n=1}^{N}\left[\xi P_n\cos 2n\theta_l+\xi' P'_n\cos(2n+1)\theta_l\right]。\end{aligned} \tag{16.169}$$

与(16.163)式比较可知，当

$$\frac{\frac{\xi'}{m}+\frac{\xi}{m'}\cos\theta_l}{\xi'}=\frac{\frac{\xi}{m'}+\frac{\xi'}{m}\cos\theta_l}{\xi} \tag{16.170}$$

(可证(16.170)式与(16.164)式自洽。)成立时，(16.169)式约化为

$$[[G,H],H]=\lambda_2 G+\frac{\Lambda F\sin\theta_l}{mm'}, \tag{16.171}$$

式中

$$\lambda_2=A\left(\frac{1}{m}+\frac{\xi}{m'\xi'}\cos\theta_l\right)=A\left(\frac{1}{m'}+\frac{\xi'}{m\xi}\cos\theta_l\right)。 \tag{16.172}$$

把(16.167)式代入(16.172)式，得到

$$\lambda_2=\frac{A}{2mm'}\left[m+m'\pm\sqrt{(m-m')^2+4mm'\cos^2\theta_l}\right]。 \tag{16.173}$$

鉴于上述讨论的结果，可以认为 H 的不变本征算符形为

$$O_e=k_1F+k_2G, \tag{16.174}$$

从而有

$$\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 O_e = [[O_e, H], H]$$

$$= \left(k_1\lambda_1 + k_2\frac{\Lambda\sin\theta_l}{mm'}\right)F + (k_2\lambda_2 + k_1\Lambda\sin\theta_l)G$$

$$= \lambda(k_1F + k_2G)。\tag{16.175}$$

这就要求

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{k_2}{k_1}\frac{\Lambda\sin\theta_l}{mm'} = \lambda_2 + \frac{k_1}{k_2}\Lambda\sin\theta_l,\tag{16.176}$$

所以$\frac{k_1}{k_2}$应该是下述方程的解：

$$\Lambda\sin\theta_l\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{k_1}{k_2} - \frac{\Lambda\sin\theta_l}{mm'} = 0。\tag{16.177}$$

解此方程，得

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{4(\Lambda\sin\theta_l)^2}{mm'}}}{2\Lambda\sin\theta_l}。\tag{16.178}$$

另由(16.166)式与(16.173)式可知

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A(m+m')}{mm'},$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{A^2}{m^2m'^2}[(m-m')^2 + 4mm'\cos^2\theta_l],\tag{16.179}$$

把它们代入(16.176)式，看出能级间隔是

$$\sqrt{\lambda} \Rightarrow \left\{\frac{1}{2mm'}\left[A(m+m') \pm \sqrt{A^2(m+m')^2 + 4mm'(\Lambda^2 - A^2)\sin^2\theta_l}\right]\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{16.180}$$

这就是新的声学支和光学支。

习　　题

1. 试用纠缠态表象解以下动力学系统的薛定谔方程：

$$H = H_1 + H_2,$$

$$H_1 = \omega'(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) + \sqrt{2}\lambda X_1 \cos\omega_1 t + \sqrt{2}\sigma X_2 \cos\omega_2 t,$$

$$X_i = \frac{a_i^\dagger + a_i}{\sqrt{2}}, i = 1,2,$$

$$H_2 = g(a_1^\dagger a_2^\dagger \mathrm{e}^{-2i\omega_0 t} + a_1 a_2 \mathrm{e}^{i2\omega_0 t}),$$

$$g = \omega' - \omega_0。$$

（参见 Fan Hongyi and Zhong Huajiang, J. Phys. A37(2004) 2439）

2. 用不变本征算符方法求半无限长晶格链的振动模。

第十七章

费米压缩算符的乘法规则

17.1 费米压缩算符的相干态表象

对玻色子压缩态已经研究得比较透彻了。那么，对于费米子，有无相应的压缩算符与压缩态呢？有的文献曾指出超导理论中的 Bardeen-Cooper-Schreifer 态是某一种压缩费米子对态。另一方面，费米子相干态是可以很自洽地定义的，其形式如同玻色子相干态，即[148]

$$|\alpha\rangle = \exp(f^{\dagger}\alpha - \bar{\alpha}f)\,|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\alpha}\alpha + f^{\dagger}\alpha\right)|0\rangle, \tag{17.1}$$

其厄米特共轭态是

$$\langle\alpha| = \langle 0|\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}f\right), \tag{17.2}$$

式中 f 与 $f^{\dagger}$ 分别代表费米子湮灭算符和产生算符，它们满足反对易关系：

$$\{f, f^{\dagger}\} = 1,$$

α 与 $\bar{\alpha}$ 是 Grassmann 数，满足反对易 c 数的规则[149]：

$$\begin{gathered}\alpha^2 = 0,\ \bar{\alpha}^2 = 0,\ \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0,\ \{\alpha, f\} = 0,\\ \{\alpha, f^{\dagger}\} = 0,\ \int d\alpha = \int d\bar{\alpha} = 0,\ \int \alpha\, d\alpha = \int \bar{\alpha}\, d\bar{\alpha} = 1。\end{gathered} \tag{17.3}$$

注意 Grassmann 数与费米算符是反对易的。从(17.1)式可见，

$|\alpha\rangle$是湮灭算符的本征态：

$$f\mid\alpha\rangle=\left[f,\exp\left(-\frac{\bar{\alpha}\alpha}{2}+f^{\dagger}\alpha\right)\right]\mid 0\rangle=\mid\alpha\rangle\alpha。\quad(17.4)$$

受泡利不相容原理的限制，$|\alpha\rangle$在 Fock 空间中的展开是

$$\mid\alpha\rangle=(\mid 0\rangle+\mid 1\rangle\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\alpha}\alpha\right)。\quad(17.5)$$

可以对费米子系统（费米算符与 Grassmann 数）引入 IWOP 技术，它具有以下性质[150]、[151]：

(1) 在正规乘积记号：　：内，任何两个费米算符是反对易的，即显示为反对易 c 数的行为。

(2) 可以对：　：内部的非算符变量积分，也包括对 Grassmann 数的积分。

(3) 一个“Grassmann 数-费米算符”对（GFOP）与另一个 GFOP 在：　：内部是对易的。

(4) 费米子真空投影算符的正规乘积形式是

$$\mid 0\rangle\langle 0\mid=:\exp(-f^{\dagger}f):,\quad(17.6)$$

事实上，由泡利原理$|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|=1$ 以及 $f=|0\rangle\langle 1|$，$f^{\dagger}=|1\rangle\langle 0|$，可见

$$\mid 0\rangle\langle 0\mid=1-\mid 1\rangle\langle 1\mid=1-f^{\dagger}f=:\exp(-f^{\dagger}f):。$$

由以上性质，可把费米子相干态的完备性写作

$$\int d\bar{\alpha}d\alpha\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid=\int d\bar{\alpha}d\alpha:\exp(-\bar{\alpha}\alpha+f^{\dagger}\alpha+\bar{\alpha}f-f^{\dagger}f):=1,\quad(17.7)$$

式中用到了积分公式：

$$\int\prod_{i=1}d\bar{\alpha}_i d\alpha_i\exp\left[-\sum_{i,j}\bar{\alpha}_i A_{ij}\alpha_j+\sum_i(\bar{\alpha}_i\eta_i+\bar{\eta}_i\alpha_i)\right]$$
$$=\det A\exp\left[\sum_{i,j}\bar{\eta}_i(A^{-1})_{ij}\eta_j\right],\quad(17.8)$$

式中 η 与 $\bar{\eta}$ 也是 Grassmann 数，而 A 是一个复值矩阵。

利用费米子相干态，可以考察 Grassmann 数空间中的赝经典

变换将会诱导(或投影)出什么量子力学的幺正变换算符来。为此,记

$$|\alpha_i\rangle = \left|\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \bar{\alpha}_i\end{pmatrix}\right\rangle = \exp(f_i^{\dagger}\alpha_i - \bar{\alpha}_i f_i)\,|0\rangle_i, \qquad (17.9)$$

这样,双模费米子相干态 $|\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 可写为

$$|\alpha_1,\alpha_2\rangle = \left|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \bar{\alpha}_1\\ \alpha_2\\ \bar{\alpha}_2\end{pmatrix}\right\rangle。 \qquad (17.10)$$

构造如下的投影算符[152]:

$$U(r,s) = -\frac{1}{s}\int\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i\left|V_{r,s}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \bar{\alpha}_1\\ \alpha_2\\ \bar{\alpha}_2\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \bar{\alpha}_1\\ \alpha_2\\ \bar{\alpha}_2\end{pmatrix}\right|, \qquad (17.11)$$

式中

$$V_{r,s} = \begin{pmatrix}-s & 0 & 0 & -r\\ 0 & -s^* & -r^* & 0\\ 0 & r & -s & 0\\ r^* & 0 & 0 & -s^*\end{pmatrix},$$

$$|s|^2 + |r|^2 = 1。 \qquad (17.12)$$

按(17.10)式的习惯,则(17.11)式中的右矢就是

$$\left|\begin{pmatrix}-s\alpha_1 - r\bar{\alpha}_2\\ -s^*\bar{\alpha}_1 - r^*\alpha_2\\ r\bar{\alpha}_1 - s\alpha_2\\ r^*\alpha_1 - s^*\bar{\alpha}_2\end{pmatrix}\right\rangle \equiv |-s\alpha_1 - r\bar{\alpha}_2\rangle \otimes |r\bar{\alpha}_1 - s\alpha_2\rangle。$$

$$(17.13)$$

用费米系统的 IWOP 技术和如下的积分公式:

$$\int\prod_i \mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\quad\bar{\alpha})\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}}\\ \bar{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} + (\sigma_1\quad\sigma_2)\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}}\\ \bar{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}(\sigma_1\quad\sigma_2)\begin{pmatrix}C & D\\ A & B\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_2^{\mathrm{T}}\\ \sigma_1^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right],\tag{17.14}$$

式中 σ_1 与 σ_2 是 Grassmann 数。积分(17.11)式,可以计算出

$$U(r,s)=\exp\left(\frac{r}{s^*}f_1^{\dagger}f_2^{\dagger}\right)\exp\left[(f_1^{\dagger}f_1+f_2^{\dagger}f_2-1)\ln\left(\frac{-1}{s^*}\right)\right]\cdot\exp\left(\frac{r^*}{s^*}f_1f_2\right)。\tag{17.15}$$

对照双模玻色子压缩算符的形式,可见上式可称为费米压缩算符,它产生的压缩变换为

$$\begin{aligned}f_1'&\equiv Uf_1U^{-1}=-s^*f_1+rf_2^{\dagger},\\ f_2'&\equiv Uf_2U^{-1}=-s^*f_2-rf_1^{\dagger},\end{aligned}\tag{17.16}$$

(17.11)式表明在 Grassmann 数空间中的 $V_{r,s}$ 变换(一个属于 $SO(4)$ 群的元素)可以映射出费米压缩算符。

17.2　费米压缩算符的成群性质[152]

设有

$$\begin{aligned}V_{r_3,s_3}&=V_{r_1,s_1}V_{r_2,s_2},\\ s_3&=r_1r_2^*-s_1s_2,\\ r_3&=-s_1r_2-r_1s_2^*,\end{aligned}\tag{17.17}$$

那么,相应的两个费米压缩算符 $U(r_1,s_1)U(r_2,s_2)$ 的乘积是什么呢? 用(17.13)式可写出

$$\begin{aligned}U(r_1,s_1)U(r_2,s_2)=&\frac{1}{s_1s_2}\int\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}\bar{\beta}_i\mathrm{d}\beta_i\\ &\cdot|-s_1\beta_1-r_1\bar{\beta}_2,r_1\bar{\beta}_1-s_1\beta_2\rangle\langle\beta_1,\beta_2|\\ &\cdot\int\prod_{j=1}^{2}\mathrm{d}\bar{\alpha}_j\mathrm{d}\alpha_j\ |-s_2\alpha_1-r_2\bar{\alpha}_2,r_2\bar{\alpha}_1-s_2\alpha_2\rangle\\ &\cdot\langle\alpha_1,\alpha_2|。\end{aligned}\tag{17.18}$$

利用费米子相干态的内积性质：

$$\langle\alpha_1'\mid\alpha_1\rangle=\exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1'\alpha_1'+\bar{\alpha}_1\alpha_1)+\bar{\alpha}_1'\alpha_1\right],\quad(17.19)$$

可以进一步将(17.18)式写为

$$U(r_1,s_1)U(r_2,s_2)=\frac{1}{s_1s_2}\int\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}\bar{\beta}_i\mathrm{d}\beta_i\exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{\beta}_1\beta_1+\bar{\beta}_2\beta_2)\right]\cdot\left|-s_1\beta_1-r_1\bar{\beta}_2,r_1\bar{\beta}_1-s_1\beta_2\right\rangle\langle 0,0\mid H,\quad(17.20)$$

式中

$$H\equiv\int\prod_{j=1}^{2}\mathrm{d}\bar{\alpha}_j\mathrm{d}\alpha_j\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\bar{\alpha}_1\quad\bar{\alpha}_2)W(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\bar{\alpha}_1\quad\bar{\alpha}_2)^{\mathrm{T}}+(-\bar{\beta}_1s_2\quad-\bar{\beta}_2s_2\quad\bar{\beta}_2r_2-f_1\quad-\bar{\beta}_1r_2-f_2)\cdot(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\bar{\alpha}_1\quad\bar{\alpha}_2)^{\mathrm{T}}\right],\quad(17.21)$$

而

$$W\equiv\begin{pmatrix}0&r_2^*s_2&|s_2|^2&0\\-r_2^*s_2&0&0&|s_2|^2\\-|s_2|^2&0&0&-r_2s_2^*\\0&-|s_2|^2&r_2s_2^*&0\end{pmatrix},$$

$$\det W=|s_2|^4。\quad(17.22)$$

利用积分公式(17.14)，并注意矩阵求逆的公式：

$$\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(C-DB^{-1}A)^{-1}&C^{-1}D(AC^{-1}D-B)^{-1}\\B^{-1}A(DB^{-1}A-C)^{-1}&(B-AC^{-1}D)^{-1}\end{pmatrix},\quad(17.23)$$

可算出

$$H=(\det W)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{2}(-\bar{\beta}_1s_2\quad-\bar{\beta}_2s_2\quad\bar{\beta}_2r_2-f_1\quad-\bar{\beta}_1r_2-f_2)\right.$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-|s_2|^2 & 0 & 0 & -r_2s_2^* \\ 0 & -|s_2|^2 & r_2s_2^* & 0 \\ 0 & r_2^*s_2 & |s_2|^2 & 0 \\ -r_2^*s_2 & 0 & 0 & |s_2|^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\bar{\beta}_2r_2-f_1 \\ -\bar{\beta}_1r_2-f_2 \\ -\bar{\beta}_1s_2 \\ -\bar{\beta}_2s_2\end{pmatrix}\Bigg], \tag{17.24}$$

式中 4×4 矩阵之逆$(\quad)^{-1}$为

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -\frac{r_2}{s_2} \\ 0 & -1 & \frac{r_2}{s_2} & 0 \\ 0 & \frac{r_2^*}{s_2^*} & 1 & 0 \\ -\frac{r_2^*}{s_2^*} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。 \tag{17.25}$$

把上式代入(17.24)式，得

$$H=|s|^2\exp\left[\frac{1}{s_2^*}(\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2r_2+f_2\bar{\beta}_2+f_1\bar{\beta}_1+f_1f_2r_2^*)\right]。 \tag{17.26}$$

把此结果代入(17.20)式后，再用(17.14)式和(17.23)式，得

$$\begin{aligned}&U(r_1,s_1)U(r_2,s_2)\\&=\frac{|s_2|^2}{s_1s_2}:\int\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}\bar{\beta}_i\mathrm{d}\beta_i\exp\left[\frac{1}{2}(\beta_1\quad\beta_2\quad\bar{\beta}_1\quad\bar{\beta}_2)J(\beta_1\quad\beta_2\quad\bar{\beta}_1\quad\bar{\beta}_2)^{\mathrm{T}}\right.\\&\quad+\left(-f_1^\dagger s_1\quad-f_2^\dagger s_1\quad f_2^\dagger r_1+\frac{f_1}{s_2^*}\quad-f_1^\dagger r_1+\frac{f_2}{s_2^*}\right)\\&\quad\left.\cdot(\beta_1\quad\beta_2\quad\bar{\beta}_1\quad\bar{\beta}_2)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{s_2^*}f_1f_2r_2^*-f_1^\dagger f_1-f_2^\dagger f_2\right]:,\end{aligned} \tag{17.27}$$

式中

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & r_1^* s_1 & |s_1|^2 & 0 \\ -r_1^* s_1 & 0 & 0 & |s_1|^2 \\ -|s_1|^2 & 0 & 0 & \frac{r_2}{s_2^*} - r_1 s_1^* \\ 0 & -|s_1|^2 & r_1 s_1^* - \frac{r_2}{s_2^*} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det J = \left(\frac{s_1 s_3^*}{s_2^*}\right)^2。\tag{17.28}$$

注意到

$$\begin{pmatrix} -|s_1|^2 & 0 & 0 & \frac{r_2}{s_2^*} - r_1 s_1^* \\ 0 & -|s_1|^2 & r_1 s_1^* - \frac{r_2}{s_2^*} & 0 \\ 0 & r_1^* s_1 & |s_1|^2 & 0 \\ -r_1^* s_1 & 0 & 0 & |s_1|^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s_3^*} \begin{pmatrix} s_1^* s_2^* & 0 & 0 & -\frac{r_1 s_3^*}{s_1} - r_2 s_1^* \\ 0 & s_1^* s_2^* & \frac{r_1 s_3^*}{s_1} + r_2 s_1^* & 0 \\ 0 & -r_1^* s_2^* & -s_1^* s_2^* & 0 \\ r_1^* s_2^* & 0 & 0 & -s_1^* s_2^* \end{pmatrix}。\tag{17.29}$$

用(17.14)式和费米系统的正规乘积内积分技术积分(17.27)式，得

$$U(r_1, s_1)U(r_2, s_2) = -s_3^* : \exp\left[\frac{r_3}{s_3^*} f_1^\dagger f_2^\dagger + \left(\frac{-1}{s_3^*} - 1\right) \cdot (f_1^\dagger f_1 + f_2^\dagger f_2) + \frac{r_3^*}{s_3^*} f_1 f_2\right] :$$

$$= U(r_3, s_3)。\tag{17.30}$$

可见费米压缩算符的乘法是 $SO(4)$ 群元乘法的表示，因而也是成

群的。这样一来,就可以用一个费米压缩变换来代替多个费米压缩变换的效果。对照第三章 3.3 节的内容,可以看到费米情形与玻色情形的"超对称"性。

结语

本书已经叙述了这样的主题，即沿着发展狄拉克的符号法并结合爱因斯坦等人的量子纠缠思想，可以从量子力学的基本表象出发直接地走到量子光学的数理前沿。爱因斯坦在庆祝普朗克生日时曾写道："首先我同意叔本华所说的，把人们引向艺术和科学的最强烈的动机之一，是要逃避日常生活中令人厌恶的粗俗和使人绝望的沉闷，是要摆脱人们自由变化不定的欲望的桎梏。"追求量子光学中的数学美本身也是一种艺术，而狄拉克的符号法提供了探索这种艺术的道路。

爱因斯坦又说："在所有可能的图像中，理论物理学家的世界图像占有什么地位呢？在描述各种关系时，它要求严密的精确性达到那种只有用数学语言才能达到的最高的标准。"狄拉克的符号法正是建立了这样的标准，它创建了使人们可以方便地交流思想的描述微观世界的语言，并赋予这种语言以"语义"。通过在此语义上的推理与演绎，人们可以部分地把握物理实在。本书利用所发现的有序算符内的积分技术，使牛顿-莱布尼兹积分规则也能用于 ket-bra 组成的符号，[153]使得读者看到从原始的量子力学纠缠态表象出发，我们可以在量子光学及其相关邻域中走到多么远。

可以说本书所介绍的研究成果都基于以下两点：一是狄拉克的符号法；二是爱因斯坦的量子纠缠思想，他首先注意到两个粒子相对坐标算符与其总动量算符的可对易性隐含了"佯谬"。在这两位天才物理学家思想和方法的基础上才导致了本书以及笔者的前两部专著《量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展》和《量

子力学纠缠态表象及应用》的正式出版。这引出了笔者以下一首拙诗：

赠同行前辈

神来之笔孰能同，精巧数理一代宗。
天机识透皆造化，探源无处不春风。
奇思孕于须臾间，遐想常现梦幻中。
余亦有志承学统，可叹今世不相逢。

由于笔者的学识与智力都有限，本书有些地方还显浅薄，可能会有不当之处，还望读者不吝指教与海涵。谨借以下诗句表明自己的不足：

遥寄赤壁

欲随苏公赤壁游，何处寻梦到黄州。
掛月江心清辉冷，惬意水天小舟悠。
说古论今引百家，有酒无量呷几口？
睡意未到东方白，知会船家系鱼钩。

最后，以狄拉克的语录作为本书的结尾：

“物理学理论都应该具备数学美。

理论物理学家的工作，就是以漫长的一生来追求数学美。”

参考文献

引 言

[1] P A M Dirac, The Principle of Quantum Mechanics (4th edition), Oxford University Press (1958)

[2] A Einstein, B Podolsky and N Rosen Phys. Rev. 47 (1935) 777

[3] W H Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation (New York, 1973: Wiley)

[4] See e. g. , G M D'Ariano, M G Rassetti, J Katriel and A I Solomon Squeezed and Nonclassical Light ed P Tombesi and E R Pike (New York: Plenum 1989) 301; V Bužek J. Mod. Opt. 37 (1990) 303; R Loudon and P L Knight, J. Mod. Opt. 34 (1987) 709. For a very recent review, see V V Dodonov, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4 (2002) R1～R33; V V Dodonov and V I Man'ko, Theory of Nonclassical States of Light, by Taylor & Francis, New York, 2003; D F Walls and G J Milburn, Quantum Optics, Springer-Verlag, Berlin, 1994; M Orszag, Quantum Optics, Springer-Verlag, Berlin, 2000; Wolfgang P Schleich, Quantum Optics in Phase Space, Wiley-Vch, Berlin, 2001; M O Scully and M S Zubairy, Quantum Optics Cambridge University Press 1997

[5] 范洪义.量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展.上海:上海科学技术出版社,1997;范洪义.量子力学纠缠态表象及应用.上海:上海交通大学出版社,2001

第 一 章

[6] Fan Hongyi, J. Opt. B: Quan. and Semiclass. Opt. 5 (2003)

R147～R163; Fan Hongyi, H R Zaidi and J R Klauder, Phys. Rev. D35 (1987) 1831

[7] Fan Hongyi and Lu Hailiang, Opt. Lett. in press

[8] M A Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Book/Cole, 2002; S Jaffard, Y Meyer, and R D Ryan, Wavelets, Tools for Science & Technology, SIAM, Philadelphia, 2001; C S Burrus, R A Gopinath and Guo Haitao, Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms (A Primer), Prentice-Hall, Inc. 1998; C K Chiu, Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego, 1992

第二章

[9] J S Bell, Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 447

[10] Fan Hongyi, Phys. Lett. A126 (1987) 145; Fan Hongyi and J R Klauder, Phys. Rev. A49 (1994) 704

[11] Fan Hongyi and Chen Bozhan, Phys. Rev. A50 (1994) 3754; Fan Hongyi and Ye Xiong, Phys. Rev. A 51 (1995) 3343

[12] Fan Hongyi, Phys. Lett. A 294 (2002) 253; Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 34 (2000) 341; Fan Hongyi and Gao Weibo, ibid, in press

[13] A Furusawa et al, Science 282 (1998) 706; M S Kim, W Son, V Bužek and P L Knight, Phys. Rev. A65 (2002) 032323; L Mandel and Ė Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge Press, 1996

[14] R A Campos, B E A Saleh and M C Teich, Phys. Rev. A40 (1989) 1371

[15] Fan Hongyi, to be published

[16] Fan Hongyi and Fan Yue, Phys. Rev. A 54 (1996) 958

[17] Fan Hongyi and J Vanderlinde, Phys. Rev. A39 (1989) 2987; Fan Hongyi and H R Zaidi, Intern. J. of Quan. Chem. 35 (1989) 227; Fan Hongyi and J Vanderlinde, J. Phys. A23 (1990) L1113; Fan Hongyi, J. Phys. A23 (1990) 1833. Fan Hongyi, J. Phys. A24 (1991) 3437; Fan Hongyi and Xu Zhihua, Phys. Rev. A50 (1994)

2921

[18] A Wünsche, J. Opt B: Quantum Semiclass. Opt. 1 (1999) 11～21

[19] Fan Hongyi and Fan Yue and F T Chan, Phys. Lett. A247 (1998) 267; Fan Hongyi and Zou Hui, Phys. Lett. A252 (1999) 281; Fan Hongyi, J. Phys. A22 (1989) 1193;

[20] Review Article, Fan Hongyi, Inter. J. Mod. Phys. B18 (2004) 1387～1455

[21] A Erdelyi, Higher Transcendental Functions (The Bateman Manuscript Project), Mc Graw Hill, 1953

[22] Fan Hongyi, Zou Hui, and Fan Yue, Inter. J. Mod. Phys. A16 (2001) 369

[23] Fan Hongyi and Fan Yue, J. Phys. A36(2003) 5319

[24] Fan Hongyi and Lu Hailiang, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 10993; Fan Hongyi and Tang Xubing, J. Opt. B: Quan. & Semiclass. Opt. 7 (2005) 5765

[25] Fan Hongyi and Chen Junhua, Inter. J. Mod. Phys. 18 (2004) 1043～1053; Inter. J. Mod. Phys. 18 (2004) 2771

[26] Fan Hongyi and Sun Mingzhai, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 4 (2002) 228

[27] Fan Hongyi and Cheng Hailing, Commun. Theor. Phys. 36 (2001) 651

第三章

[28] J R Klauder and B S Skargerstam, Coherent States, World Scientific, 1985; A M Perelomov, Generalized Coherent States and Their applications, Springer Verlag, Berlin, 1986; W M Zhang, D F Feng and R Gilmore, Rev. of Mod. Phys. 64 (1990) 867; V Bargmann Commun. Pure and Appl. Math. 14 (1961) 187

[29] R J Glauber, Phys. Rev. 130 (1963) 2529; 131 (1963) 2766; K E Cahill and R J Glauber, Phys. Rev. 177 (1969) 1857、1882

[30] Fan Hongyi and Ruan Tunan, Sci. Sin. 27 (1982) 392; Fan Hongyi and Zou Hui, Phys. Lett. A252 (1999) 281; Fan Hongyi and A

Wünsche, J. Opt B: Quantum Semiclass. Opt. 2 (2000) 464
[31] Fan Hongyi, H R Zaidi and J R Klauder, Phys. Rev. D35 (1987) 1831; Fan Hongyi and J R Klauder, J. Phys. A21 (1988) L725; Fan Hongyi and H R Zaidi, Phys. Rev. A39 (1988) 2985; Fan Hongyi and Vanderlinde, J. Phys. A39 (1988) 2987
[32] Fan Hongyi and Xu Zhihua, Phys. Rev. A50 (1994) 2921; Fan Hongyi, Phys. Rev. A 41 (1990) 1526
[33] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 42 (2004) 339～342
[34] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 40 (2003) 589～594; Fan Hongyi and Lu Hailiang, Optics. Commun. (2005) in Press
[35] Fan Hongyi and Chen Junhua, Commun. Theor. Phys. 38 (2002) 147; Fan Hongyi and Lu Hailiang, Phys. Lett. A334 (2005) 132
[36] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. in Press
[37] Fan Hongyi and Lu Hailiang, Inter. J. Mod. Phys. B19 (2005) 799～856
[38] Fan Hongyi and Liu Naile, Commun. Theor. Phys. 32 (1999) 471
[39] V Bargmann, Commun. Pure and Appl. Math. 14 (1961) 187
[40] Fan Hongyi and Chen Junhua, Phys. Lett. A303 (2002) 311
[41] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. , in Press
[42] Fan Hongyi and Yu Guichuan, Mod. Phys. Lett. A16 (2001) 2067
[43] Fan Hongyi and A Wünsche, Eur. Phys. J. D15 (2001) 405; Fan Hongyi, Liu Zuwei and Ruan Tunan, Commun. Theor. Phys. 3 (1984) 175; Fan Hongyi, Fu Liang and A Wünsche, Commun. Theor. Phys. 42 (2004) 675; Fan Hongyi and Xiao Min, Phys. Rev. A54 (1996) 5295
[44] Fan Hongyi and J R Klauder, Mod. Phys. Lett. A9 (1994) 1291
[45] A S Davydov, Quantum Mechanics, 2ed, Oxford, Pergamon Press, 1976

第四章

[46] H Weyl, Z. Phys. 46 (1927) 1
[47] E Wigner, Phys. Rev. 40 (1932) 749

[48] Fan Hongyi, J. Phys. A25 (1992) 3443; Fan Hongyi and Fan Yue, Inter. J. Mod. Phys. A17 (2002) 701; Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 41 (2004) 205; Fan Hongyi, Mod. Phys. Lett. A15 (2000) 2297

[49] C L Mehta, Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 752

[50] Fan Hongyi, Mod. Phys. Lett. A15 (2001) 2197; Fan Hongyi and Fan Yue, Mod. Phys. Lett. A13 (1998) 433

[51] Fan Hongyi, Phys. Lett. A161 (1991) 1

[52] Fan Hongyi and Fan Yue, Commun. Theor. Phys. 38 (2002) 297

[53] Fan Hongyi and Cheng Hailing, Commun. Theor. Phys. 36 (2001) 651

[54] Fan Hongyi, Phys. Rev. A65 (2002) 064102

[55] Fan Hongyi and Yu Guichuan, Mod. Phys. Lett. A15 (2000) 499

第五章

[56] Fan Hongyi and Chen Junhua, Eur. Phys. J. D23 (2003) 437

[57] Fan Hongyi and Li Chao and Jiang Zhonghua, Phys. Lett. A327 (2004) 416

[58] Jiang Nianquan, Lu Hailiang and Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 43(2005) 17

[59] Shigefumi Naka, Prog. Theor. Phys. 59 (1978) 2107

[60] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 11 (1989) 509

第六章

[61] Fan Hongyi, Phys. Lett. A313 (2003) 343; Fan Hongyi, Zou Hui and Fan Yue, Phys. Lett. A254 (1999) 137

[62] Fan Hongyi and Li Chao, Phys. Lett. A325 (2004) 188

第七章

[63] V Namias, J. Inst. Math. Appl. 25 (1980) 241

[64] A C McBride, F H Kerr, IMA. J. Appl. Math. 39 (1987) 159; D Mendlovic et al. Applied Optics. 35 (1996) 3925; D Mendlovic, H

M Ozaktas, A W Lohmann, Appl. Opt. 33 (1994) 6188; D Mendlovic et al. J. Opt. Soc. Am. A 12 (1995) 2424; D Mendlovic, H M Ozaktas, J. Opt. Soc. Am. A10 (1993) 1875; Yu L, et al. Opt. Lett. 23 (1998) 1158

[65] A W Lohmann, J. Opt. Soc. Am. A10 (1993) 2181

[66] Fan Hongyi and Fan Yue, Commun. Theor. Phys. 39 (2003) 417

[67] Fan Hongyi and Fan Yue, Eur. Phys. J. D21 (2002) 233; Fan Hongyi and Jiang Nianquan, Commun. Theor. Phys. 42 (2004) 23

[68] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys, 40 (2003) 409

[69] Fan Hongyi and Lu Hailiang, Opt. Lett. 28 (2003) 680

[70] Song Feijun and S Jutamulia, Modern Optical Information Processing, Peking University Press, Beijing, 2000

[71] Fan Hongyi and Fan Yue, Commun. Theor. Phys. 39 (2003) 97; Fan Hongyi and Chen Junhua, Commun. Theor. 39 (2003) 147; Fan Hongyi and Xu Xuefen, Opt. Lett. 29 (2004) 1048

[72] Fan Hongyi and Fan Yue, Commun. Theor. Phys. 38 (2002) 403; 40 (2003) 645

[73] J Schwinger, Quantum Theory of Angular Momentum, New York, Academic Press, 1965

第八章

[74] Fan Hongyi, Opt. Lett. 28 (2003) 2177

[75] I N Sneddon. The Use of Integeral Transforms, McGraw-Hill, New York, 1966; W Magnus, et al. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, 3rd Edition, Springer-Verlag, 1972

第九章

[76] Y Takahashi and H Umezawa, Collective Phenomena. 2 (1975) 55

[77] Fan Hongyi and Fan Yue, Phys. Lett. A246 (1998) 242

[78] Fan Hongyi, Phys. Lett. A294 (2002) 134; Mod. Phys. Lett. A18 (2003) 677; Xu Xuefen and Fan Hongyi, Mod. Phys. Lett. A21

(2006) 1

[79] Fan Hongyi and Fan Yue, J. Phys. A35 (2002) 6873; Fan Hongyi and Liang Xianting, Chin. Phys. Lett. 17 (2000) 174

[80] Fan Hongyi and Fan Yue, Phys. Lett. A282 (2001) 269; Fan Hongyi and Wang Hui, Mod. Phys. Lett. B14 (2000) 553

[81] Fan Hongyi and A Wünsche, J. Opt. B: Quan & Semiclass. Opt. 7 (2005) 88

[82] Fan Hongyi, Commun Theor. Phys. 37 (2002) 289; 16 (1991) 123; Fan Hongyi and Lu Hailiang, Phys. Lett. A332 (2004)1

第十章

[83] Fan Hongyi, J. Phys. A35 (2002) 1007; Fan Hongyi and Hu Haipeng, J. Phys. A36 (2003) 293

[84] Fan Hongyi and Sun Zhihu, J. Phys. A34 (2001) 1629

[85] L Susskind and J Glogower, Physics, 1 (1964) 49; R Lynch, Phys. Rep. 256 (1995) 367

[86] J W Noh, A Fougères and L Mandel, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1426; Physica Scripta, T48 (1993) 29～34; M Freyberger, M Heni and W P Schleich, Quantum. Semiclass. Opt. 7 (1995) 187

[87] J H Shapiro and S S Wagner, IEEE J. Quantum Elections QE-20 (1984) 803; H P Yuen and J H Shapiro IEEE Trans. Inform. Theory. IT-26 (1980); H P Yuen and V W S Chan, Opt. Lett. 8 (1983) 177

[88] Z Hradil, Quantum Opt. 4 (1992) 93

[89] Fan Hongyi and Fan Yue, Mod. Phys. Lett. B14 (2000) 967; Fan Hongyi, Chin. Phys. Lett. 18 (2001) 857; Fan Hongyi and Liu Qiuyu Euro. Phys. J. D8 (2000) 399

[90] E T Jaynes and F W Cummings. Proc. IEEE, 51 (1965) 89

[91] Fan Hongyi and Li Liangshi, Commun. Theor. Phys. 25 (1996) 105

[92] Fan Hongyi and Lu Hailiang. Mod, Phys. Lett. B17 (2003) 153; Fan Hongyi and Lu Hailiang, J. Phys. A36 (2003) 10399

[93] F Cooper, A Khare and U Sukhatme, Phys. Rev. A51 (1995) 267;

Supersymmetry in Quantum Mechanics. 2001, World Scientific, Singapore

[94] Fan Hongyi and Hu Haipeng, J. Opt B: Quantum Semiclass. Opt. 6 (2004) 411

第十一章

[95] Fan Hongyi, Chin. Phys. Lett. 18 (2001) 1301

[96] Jiang Nianquan and Fan Hongyi, Commun. Theon. Phys. 43 (2005) 208; Fan Hongyi and Jiang Nianquan, Physica Scripta. 71 (2005) 277

[97] Fan Hongyi, Liang Xianting and Chen Junhua, Mod. Phys. Lett. B16 (2002) 861

[98] Fan Hongyi and Ou Yangjing, Mod. Phys. Lett. B17 (2003) 1293

[99] Fan Hongyi and Chen Junhua, Chin. Phys. Lett. 19 (2002) 889

[100] S Stenholm, J. Mod. Opt. 41 (1994) 2483; S Stenholm Quantum Semiclass. Opt. 7 (1995) 667; P Törma and S Stenholm and Jex, J, Phys. Rev. A52 (1995) 4853; M Reck, A Zeilinger, H Bernstein and P Bertani, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 58; J Jex, S Stenholm and A Zeilinger, Opt. Commun. 117 (1995) 95

[101] Fan Hongyi and Min Xiao, Quan. Semiclass. Opt. 9 (1997) 53

[102] Fan Hongyi, J. Phys. A 22 (1989) 1193

[103] Fan Hongyi and Song Tongqiang, J. Phys. A36 (2003) 7803

[104] Fan Hongyi and Yu Guichuan, Phys. Rev. A65 (2002) 033829; Fan Hongyi and Zhang Ying, Phys. Rev. A57 (1998) 3225

[105] Fan Hongyi and Jiang Nianquan, J. Opt B: Quantum Semiclass. Opt. 5 (2003) 283; Fan Hongyi, J. Phys. A26 (1993) 1513

[106] Fan Hongyi, Phys. Rev. A47 (1993) 2379

第十二章

[107] C H Bennett. et al, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 1895

[108] S L Braunstein and H J Kimble, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 869

[109] Fan Hongyi and Fan Yue, Mod. Phys. Lett. B16 (2002) 11; Fan

Hongyi and Fan Yue, Mod. Phys. Lett. B15 (2001) 1475

[110] Fan Hongyi, Phys. Lett. A 294 (2002) 253; Fan Hongyi and Liang Xianting, Commun. Theor. Phys. to appear

[111] Fan Hongyi and Cheng Hailing, Commun. Theor. Phys. 37 (2002) 408

[112] Fan Hongyi and Liang Xianting, Phys. Lett. A291 (2001) 61

[113] Fan Hongyi, Phys. Lett. A286 (2001) 81

第十三章

[114] B D Josephson, Phys. Lett. 1 (1962) 251; Rev. Mod. Phys. 36 (1964) 216

[115] G Schon and A D Zalkin, Phys. Rep. 198 (1990) 237

[116] R P Feynman, The Feynman Lectrues in Physics, Vol. 3 (Addison-Wisley) 1965

[117] Fan Hongyi, Phys. Lett. A 289 (2001) 172; Fan Hongyi, Fan Yue and Song Tongqiang, Phys. Lett. A305 (2002) 222; Fan Hongyi, Int. J. Mod. Phys. B17 (2003) 2599

[118] Fan Hongyi, Int. J. Mod. Phys. B18 (2004) 233～240

[119] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 41 (2004) 878

[120] Fan Hongyi and Li Chao, Phys. Lett. A319 (2003) 13

第十四章

[121] Fan Hongyi and Chen Junhua, J. Phys. A34 (2001) 10939

[122] Fan Hongyi and Fu Liang J. Phys. A36 (2003) 1531

[123] Fan Hongyi and Fu Liang, J. Phys. A36 (2003) 4987

[124] Fan Hongyi and Fu Liang, Int. J. Theor. Phys. in Press

[125] Fan Hongyi and Fu Liang, Phys. Lett. A329 (2004) 173

[126] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 34 (2000) 149

[127] Fan Hongyi, et al, Commun. Theor. Phys. in Press

[128] Fan Hongyi and J Vanderlinde, J. Phys. A23 (1990) L1113; Fan Hongyi, J. Phys. A23 (1990) 1833; Fan Hongyi and Ren Yong, J. Phys. A21 (1988) 1971

第十五章

[129] S Sivakumar, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 2 (2000) 61; Phys. Lett. A250 (1998) 257; J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999) 3441; J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000) 2289; S Mancini, Phys. Lett. A233 (1997) 291

[130] V I Manko, G Marmo, E C G Sudarshan, F Zaccaria, in: N M Atakishiev (Ed.), Proc. Ⅳ Wigner Symp (Guadalajara, Mexico. July 1995), World Scientific, Singapore, 1996, 42

[131] De Matos, R L Filho and W Vogel, Phys. Rev. A54 (1996) 4560

[132] Fan Hongyi and Cheng Hailing, Phys. Lett. A285 (2001) 256

[133] Fan Hongyi and Cheng Hailing, J. Opt. B: Quan. Semiclass. Opt. 3 (2001) 388

[134] Fan Hongyi and Yu Guichuan, J. Phys. A34 (2001) 5995

[135] Fan Hongyi, Fan Yue and Chen Junhua, J. Optics. B: Quan. Semiclass. Opt. 4 (2002) 336

[136] Fan Hongyi and Cheng Hailing, Phys. Lett. A295 (2002) 65

[137] Fan Hongyi and He Haiyan, Commun. Theor. Phys. 44 (2005) 137

第十六章

[138] Fan Hongyi and Fan Yue, Intern. J. Mod. Phys. A17 (2002) 45

[139] Fan Hongyi and Li Chao, Phys. Lett. A321 (2004) 75; Fan Hongyi, Xu Xuefen and Li Chao, Commun. Theor. Phys. 42 (2004) 824

[140] Fan Hongyi, Commun. Theor. Phys. 44 (2005) 252; Jing Sicong and Fan Hongyi, Mod. Phys. Lett. A20 (2005) 691

[141] Fan Hongyi and Wu Hao, Nuovo Cimento B119 (2004) 1105; Fan Hongyi, Wu Hao and Xu Xuefen, Inter. J. Mod. Phys. B19 (2005) 4073

[142] Fan Hongyi, Tang Xubing and Gui Weijun, J. Optics. B: Quan. Semiclass. Opt. 7 (2005) 1941

[143] Fan Hongyi and Li Liangshi, Commun. Theor. Phys. 25 (1996)

105

[144] Fan Hongyi and Da Cheng, Commun. Theor. Phys. in Press

[145] Fan Hongyi, Commum. Theor. Phys. 11 (1989) 509; Huang Hongbing and Fan Hongyi, Phys. Lett. A159 (1991) 323; 166 (1992) 308

[146] Song Tongqiang and Fan Hongyi, J. Phys. A34 (2001) 3179

[147] P Carbonaro, G Compagno and F Persico, Phys. Lett. A73 (1979) 97

第十七章

[148] Y Ohnuki, T Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60 (1978) 548

[149] F A Berezin, The Mothod of Second Quantization, New York, Academic Press. 1966

[150] Fan Hongyi, Phys. Rev. A40 (1989) 4237; Fan Hongyi, J. Math. Phys. 31 (1990) 257

[151] Fan Hongyi, Fan Yue and F T Chan, Phys. Lett. A247 (1998) 267; Fan Hongyi, Fan Yue and F T Chan, Mod. Phys. Lett. B12 (1998) 1113

[152] Fan Hongyi and Li Chao, J. Opt. B: Quan. and Semi. Opt. 6 (2004) S502, Sp. Iss

结语

[153] Fan Hongyi, Lu Hailiang and Fan Yue, Ann. of Phys. 321 (2006) 480

[General Information]
书名=国家“十五”重点图书　　从量子力学到量子光学：数理进展
作者=范洪义著
页数=390
SS号=11869832
出版日期=2005年12月第1版